Tendencias en la educación matemática basada en la investigación

Volumen 1

Lidia Aurora Hernández Rebollar
José Antonio Juárez López
Josip Slisko Ignjatov
Editores

BUAP

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Óscar Tepoz López
Diseño de portada

El Errante editor / Érika Maza Hernández
Diseño de interiores

Primera edición, 2015
ISBN: 978-607-525-002-1

Impreso y hecho en México / *Printed and made in Mexico*

Índice

Presentación

Este libro surge del Primer Taller Internacional Tendencias en la Enseñanza de las Matemáticas Basada en la Investigación, celebrado del 27 al 30 de noviembre de 2014, en la ciudad de Puebla, México. La intención del Taller, y ahora de este libro, es ofrecer a los docentes de matemáticas de todos los niveles, así como a todos los interesados en la Educación Matemática, resultados recientes de la investigación en esta área. La diferencia entre los resultados que aquí se exponen y los que se encuentran en las revistas científicas de la disciplina es que los primeros tienen la intención de ser útiles en la práctica diaria del maestro de matemáticas.

Cuando se habla de Educación Matemática fuera del ámbito investigativo suele pensarse en un conjunto de técnicas, procedimientos o estrategias útiles para la enseñanza efectiva de las matemáticas. Y, ciertamente, eso esperaríamos todos los que estamos, de alguna u otra forma, involucrados en este campo. Sin embargo, como en cualquier otra ciencia, no se puede concebir el desarrollo de la misma sin la investigación y el trabajo sistemático de los fenómenos que, en nuestro caso, son de naturaleza social y para estudiarlos se requiere de aparatos conceptuales y metodológicos no siempre sencillos o evidentes.

No hay recetas mágicas en estas páginas, hay tanto ideas prácticas como reflexiones teóricas sobre la problemática tan extensa que representa el aprendizaje de las matemáticas. Todas estas ideas están basadas en alguna o en varias investigaciones, no son ocurrencias, pues se fundamentan en experimentos, análisis de datos, indagaciones metódicas, etcétera; en general en el método científico. Así, las propuestas que usted encontrará aquí se tornan en una invitación para convertir su salón de clases en un laboratorio, y a usted docente, en un investigador de los procesos involucrados en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Algunos de los autores que participaron en esta aventura tienen un gran reconocimiento internacional en el área y otros están iniciando. Consideramos que todos y cada uno de ellos nos ofrecen algo muy valioso: su experiencia en la investigación en Educación Matemática.

Los trabajos se mantuvieron en el idioma original en el que fueron escritos por sus autores, por lo que tenemos capítulos tanto en inglés como en español, estamos seguros de que esto en la era de la globalización no será un inconveniente para nuestros lectores.

Agradecemos a todos y cada uno de los autores su contribución y manifestamos nuestro deseo de que este libro despierte el interés de los docentes de matemáticas por conocer más, y cada vez más resultados de la investigación en Educación Matemática.

Puebla, México, a 21 de octubre de 2015
Lidia Aurora Hernández Rebollar
José Antonio Juárez López
Josip Slisko Ignjatov

Primeros elementos de Didáctica de la Matemática

Bruno D'Amore[1]

Premisa

La actual investigación en didáctica disciplinar está toda direccionada a centrar la atención sobre el fenómeno del aprendizaje, pero desde un punto de vista fundacional y de cualquier forma no aceptando un único modelo de teoría de aprendizaje (incluso si la psicología cognitiva en este momento parece la más autorizada a dar fundamentos interesantes para muchas experiencias de investigación).

Afrontando la didáctica disciplinar como epistemología del aprendizaje, se darán ejemplos sólo en el campo que compete, es decir el de la matemática. Pero, las discusiones entre colegas, didactas de otras disciplinas y lecturas ocasionales, han confirmado el hecho de que las problemáticas generales parecen ser las mismas, incluso en las diversas especificidades. Por tanto, aun no deseando (o pudiendo) salir del estrecho ámbito, estoy convencido que no muy diversos serán los posibles y análogos análisis críticos que pertenecen a otros sectores de investigación.

Lo que aquí se plantea será rápidamente aclarado. Se analizarán algunas de las problemáticas que parecen emerger con más fuerza en los últimos años; que se han consolidado como elementos de investigación en Didáctica de la Matemática, y que me parece proporcionan bases sólidas y significativas para una posible generalización. Me abstendré de presen-

[1] Investigador de la Universidad Distrital "F. José de Caldas" (MESCUD), Bogotá, Colombia. Correo-e: bruno.damore@unibo.it

taciones demasiado técnicas y me limito por tanto solo a la posición de cada uno de los problemas propuestos, presentando en resumen, en los siguientes apartados, algunas técnicas bastante difusas en el ambiente de investigación y que parecen ser de particular interés especialmente para los profesores.

Por lo tanto y hasta donde sea posible, se hará referencia a investigaciones para que el lector tenga idea de aquello que los investigadores, algunos, hacen en Didáctica de la Matemática.

El contrato didáctico

Después de la mitad de los años 70 hace ingreso, en el mundo de la investigación en Didáctica de la Matemática, la idea de *contrato didáctico*, lanzada por Guy Brousseau ya desde los años 60, pero hecha famosa gracias al célebre artículo de 1986 (Brousseau, 1986). La idea se reveló rápidamente fructífera y vino definitivamente sancionada por las investigaciones de los primeros años 80. Después de la segunda mitad de los años 80, fueron estos estudios los que decretarían el triunfo y la plena teorización; en los que participaron varios estudiosos de todo el mundo: la idea viene reconocida y entra a formar parte del lenguaje aceptado por la entera comunidad internacional.

Esta idea, de espíritu del todo francés, no era del todo nueva. En 1973, Jeanine Filloux introdujo el término de *contrato pedagógico* para definir algunos tipos de relaciones entre profesor y alumno. La idea de J. Filloux era un contrato general, más social que cognitivo, mientras que el contrato didáctico de Brousseau tiene en cuenta también el conocimiento en juego. El primer intento de "definición" del contrato didáctico es el siguiente:

> En una situación de enseñanza, preparada y realizada por el maestro, el alumno generalmente tiene como tarea la de resolver un problema (matemático) por él presentado, pero el acceso a esta tarea se hace a través de una interpretación de la pregunta puesta, de las informaciones dadas, de las exigencias impuestas que son constantes de la forma de enseñar del maestro. Estos hábitos (específicos) del docente esperados por el alumno y los comportamientos del alumno esperados por el docente constituyen el contrato didáctico (Brousseau, 1986).

Generalmente estas "expectativas" no son debidas a acuerdos explícitos, impuestos por la escuela o por los docentes o concordados con los alumnos, sino a la concepción de la escuela, de la matemática, a la repetición de modalidades.

El estudio de los varios fenómenos de comportamiento de los alumnos desde este punto de vista ha dado grandes frutos de extremo interés. Hoy muchos comportamientos, considerados hasta hace poco tiempo, inexplicables o ligados al desinterés, a la ignorancia o la edad inmadura, han sido por el contrario clarificados.

Uno de los estudios más notables es aquel que se conoce bajo el nombre de *Efecto edad del capitán* (creo que esta denominación fue acuñada por Adda, 1987, como lo confirma Sarrazy, 1995). El nombre está ligado a un célebre y antiguo problema (que se encuentra también en Peano, 1924) en el que, proporcionados los datos de un barco (color, longitud del casco, altura de los mástiles, etc.), se pide la edad del capitán. El comportamiento interesante de los alumnos frente a este tipo de problemas "absurdos" o "imposibles" fue dado a la luz en el IREM de Grenoble en 1980 (IREM Grenoble, 1980), pero después dio notables frutos en lo que hoy se llama *ruptura del contrato.*

Estudios profundos sobre el contrato didáctico han permitido revelar de hecho que los niños y los jóvenes tienen expectativas particulares, esquemas generales, comportamientos que nada tienen que ver *stricto sensu* con la matemática, sino que dependen del contrato didáctico instaurado en clase.

Siempre ligado al contrato didáctico, resulta muy interesante leer la actitud de los estudiantes frente al célebre problema de Alan Schoenfled (1987a):

> Un autobús del ejército transporta 36 soldados. Si 1128 soldados deben ser transportados en autobús al campo de adiestramiento, ¿cuántos autobuses deben ser usados?

De los 45 000 alumnos de quince años de los Estados Unidos que participaron en la prueba de Schoenfeld, solo un cuarto (23%) logra dar la respuesta esperada: 32. El investigador norteamericano afirma por tanto que muy pocos estudiantes están en grado de releer el sentido de la pregunta, osando escribir 32, de hecho no obtenido formalmente de la operación, y propone como causa de este comportamiento cuestiones relativas a hechos metacognitivos.

A distancia de varios años, recientemente hemos querido analizar de nuevo la misma situación (D'Amore y Martini, 1997) y encontramos algunas novedades. La prueba fue realizada en varios niveles escolares dejando libertad a los estudiantes de usar o no la calculadora. Obtuvimos varias respuestas del tipo: 31,333333, especialmente de parte de quien usaba la calculadora; otras respuestas fueron: $31,\overline{3}$ y 31,3.

El control semántico, cuando existe, lleva a algún alumno a escribir 31 (un autobús "no puede separarse"), pero muy pocos se sienten *autorizados* a escribir 32. Entre quienes usan la calculadora, se encontró con 0% de respuesta "32".

El estudiante no se siente autorizado a escribir aquello que no aparece después de efectuada una operación: aún haciendo el control semántico sobre los autobuses como objetos no divisibles en partes, esto no autoriza a escribir "32"; hay quien de hecho no se siente autorizado ni siquiera a escribir "31".

No se puede hablar simplemente de "error" de parte del estudiante, a menos que no se entienda por "error" la incapacidad de controlar, una vez obtenida la respuesta, si dicha respuesta es semánticamente coherente con la pregunta dada. Pero entonces se desencadena otro mecanismo: el estudiante no está dispuesto a admitir de haber cometido un error y prefiere hablar de un "truco", de una "trampa"; para el estudiante un error matemático o en matemática, es un error de cálculo o asimilable a éste, no de tipo semántico.

Un largo y sistemático estudio de esta prueba, realizado incluso a través de numerosas entrevistas a los estudiantes, revela que "la culpable" de este comportamiento es una cláusula del contrato didáctico, a la cual ya habíamos dado el nombre de "cláusula de delega formal". El estudiante lee el texto, decide la operación a efectuar y los números con los cuales debe operar; a este punto salta la cláusula de la *delega formal*: no es tarea del estudiante razonar o controlar. Sea que haga los cálculos a mano, *más aún* si hace uso de la calculadora, se instaura aquella cláusula que… limita las facultades racionales, críticas, de control: el compromiso del estudiante está concluido y ahora le corresponde al algoritmo, o mejor aún a la máquina, trabajar para él. La tarea sucesiva del estudiante será aquella de transcribir el resultado, sea cual sea y sin importar que cosa signifique, en el contexto problemático.

Los estudios sobre el contrato didáctico, prácticamente adelantados en todo el mundo, se están revelando fructíferos y han dado, en pocos años, resultados de gran interés, que siempre nos hace conocer más la epistemología del aprendizaje matemático.

Conflictos y misconcepciones

Otro argumento de estudio en Didáctica de la Matemática que está emergiendo con fuerza y que tiene gran importancia hace referencia a los *conflictos cognitivos*. Se trata de lo siguiente: el estudiante ha podido, en el transcurso del tiempo, haber adquirido un concepto y haberse hecho una imagen; esta imagen pudo haber sido reforzada en el tiempo a través de pruebas, experiencias repetidas. Pero puede ser que tal imagen, antes o después, se revela inadecuada, respecto a otra del mismo concepto, por ejemplo propuesta por el mismo maestro o por otros, y no esperada, es decir en contraste con la precedente.

Se crea así un *conflicto* entre la precedente imagen, que el estudiante creía definitiva, relativa a dicho concepto, y la nueva; esto sucede especialmente cuando la nueva imagen amplía los límites de aplicabilidad del concepto, o proporciona una versión más completa.

Ligada a las ideas de "imagen de un concepto" y de "conflicto", existe una importante cuestión que tiene que ver con las *misconcepciones.* Una misconcepción es un concepto errado y por tanto constituye genéricamente un evento de evitar; pero, ésta no va vista siempre como una situación del todo negativa: no se excluye que, para poder alcanzar la construcción de un concepto, sea *necesario* pasar a través de una misconcepción momentánea, en curso de sistemación. Se puede notar como, al menos en determinados casos, algunas imágenes pueden ser verdaderas y propias misconcepciones, es decir interpretaciones erradas de las informaciones recibidas.

Aquí se presenta la vasta e interesante problemática del "currículo oculto". El estudiante revela las propias misconcepciones, por ejemplo, cuando aplica *correctamente* reglas *incorrectas*. Generalmente, al origen de este hecho existe una falta de comprensión y una errada interpretación. Si el profesor no se da cuenta de esto, sus solicitudes caen en el vacío porque el estudiante ha incluido en su proprio currículo aquellas reglas que considera correctas y que, en algunos casos, han funcionado.

El conflicto cognitivo es un conflicto "interno" causado de la no congruencia entre dos conceptos, o entre dos imágenes o entre una imagen y un concepto. Pero el conflicto también puede ser social. Supongamos que un estudiante tiene una imagen o un concepto para un cierto argumento y que considera es compartido por toda la clase (o, más general, por toda la sociedad); un buen día tal imagen o tal concepto entra en conflicto con aquel propuesto por el profesor o por una nueva situación y, en dicha ocasión, el estudiante se da cuenta que su idea no es compartida con la clase, es más, sólo tiene que ver con él, está aislado; por ejemplo sus compañeros no se asombran de una propuesta que él, por el contrario, no logra aceptar.

Un ejemplo únicamente: un cuadrado es casi siempre dibujado y propuesto en los libros de texto con los lados horizontales y verticales, el rombo por lo general con las diagonales horizontales y verticales. El estudiante Pedrito se ha hecho la idea que los cuadrados y los rombos *deben* ser así, y está convencido que su concepción es la misma que tienen sus compañeros de clase; cree, implícitamente, que se trata de una idea totalmente compartida. Cierto día el maestro dibuja un cuadrado con las diagonales horizontal y vertical, pero no lo llama "rombo", como lo espera Pedrito, sino "cuadrado". Pedrito dice: ¿El maestro se ha equivocado? Pero se da cuenta que sus compañeros aceptan sin problemas esta denominación: se trata sí de un conflicto cognitivo, pero no sólo sobre el plano individual "interno", sino también sobre el plano social porque pone a Pedrito en conflicto con un concepto que consideraba compartido.

A la base de los conflictos existen por tanto las *misconcepciones*, es decir, concepciones momentáneas no correctas, en espera de consolidación cognitiva mejor elaboradas y más críticas. Pero atención: el estudiante no lo sabe y por tanto considera que las suyas, aquellas que para el investigador son misconcepciones, son por el contrario concepciones verdaderas y propias. Por tanto, es el adulto quien sabe que aquellas elaboradas y hechas propias por los jóvenes pueden ser solo misconcepciones.

Llamarlas *errores* es demasiado simple y banal: no se trata de castigar, ni evaluar negativamente; se trata, por el contrario, de dar los instrumentos para la elaboración crítica.

En un cierto sentido, dado que incluso niños pequeños (de tres a seis años) tienen concepciones matemáticas ingenuas pero profundas obtenidas empíricamente o por intercambio social (Aglì y D'Amore, 1995), se podría pensar que toda la carrera escolar de un individuo, por lo que tiene que ver con la matemática, está construida por el paso de misconcepciones a concepciones correctas.

En un cierto sentido, las misconcepciones, entendidas como tales (concepciones momentáneas no correctas, en espera de consolidación cognitiva más elaboradas y críticas) no pueden ser eliminadas, ni constituyen del todo un daño. Parece ser un momento necesario y delicado de pasaje, de una prima concepción elemental (ingenua, espontánea, primitiva) a una mejor elaborada y más correcta.

Imágenes y modelos

Apenas una rápida mirada sobre este complejo argumento. Dado que he hecho referencia, líneas arriba, a términos como "imagen" y "modelo" veo necesario hacer claridad sobre lo que acepto con la siguiente terminología (pero, no totalmente compartida).

"Imagen mental" es el resultado figural o proposicional producto de un estímulo (interno o externo). La imagen mental está condicionada por influencias culturales, estilos personales, en pocas palabras es un producto típico del individuo, pero con constantes y connotaciones comunes entre individuos diversos. Éstas pueden ser más o menos elaboradas conscientemente (pero, también esta capacidad de elaboración depende del individuo). Sin embargo, la imagen mental es interna, o al menos en primera instancia, involuntaria.

El conjunto de las imágenes mentales elaboradas (más o menos conscientes) y todas relativas a un cierto concepto constituye el modelo mental (interno) del concepto mismo.

Dicho en otras palabras, el estudiante se construye una imagen I_1 de un concepto C; él la cree estable, definitiva. Pero en un cierto punto de su historia cognitiva, recibe informaciones sobre C que no están contempladas en la imagen I_1 que tenía. Él debe entonces (y esto puede ser debido a un conflicto cognitivo, *deseado* por el profesor) adecuar la "vieja" imagen I_1 a una nueva, más amplia, que no solo conserve las precedentes informaciones, sino que también acoge coherentemente las nuevas. De hecho, él se construye una nueva imagen I_2 de C. Tal situación puede repetirse varias veces durante la historia escolar de un alumno, obligándolo a pasar de I_2 a I_3.

Muchos de los conceptos de la Matemática son alcanzados gracias al pasaje, en los meses o en los años, de una imagen a otra más compleja y se puede imaginar esta sucesión de construcciones conceptuales, es decir de sucesivas imágenes I_1, I_2… I_n, I_{n+1}… como una especie de escalada, de "acercamiento" a C.

A un cierto punto de esta sucesión de imágenes, se llega al momento en el cual la imagen después de varios pasajes "resiste" a estímulos diversos, se demuestra bastante "fuerte" de incluir todas las argumentaciones e informaciones nuevas que llegan respecto del concepto C que representa. Una imagen de este tipo, de consecuencia estable e inalterable, se puede llamar "modelo" M del concepto C.

Por tanto, hacerse un modelo de un concepto, significa reelaborar sucesivamente imágenes (débiles, inestables) para hacer definitiva (fuerte, estable) una de éstas.

Existen dos posibilidades:

- M se forma en el momento justo en el sentido que se trata en verdad del modelo correcto, precisamente aquel que el maestro deseaba para C; la acción didáctica ha funcionado y el estudiante se ha construido el modelo M correcto (aquel deseado del maestro) del concepto C;
- M se forma demasiado pronto, cuando aún representa solo una imagen que habría debido ser ampliada ulteriormente; a este punto no es fácil alcanzar C, porque la estabilidad de este parcial M es por sí misma un obstáculo para futuros aprendizajes.

Sigamos en el análisis de los modelos y de su papel en el aprendizaje.

Cuando un maestro propone una imagen fuerte y convincente de un concepto C, que se vuelve persistente, confirmada de continuos ejemplos, de experiencias, la imagen se transforma en *modelo intuitivo.*

Existe de hecho correspondencia directa entre la situación propuesta y el concepto matemático que se está utilizando; pero este modelo podría no ser aún aquel del concepto C que esperamos al interno del saber matemático.

Por tanto, entre los modelos, se reserva el nombre de "modelo intuitivo" a aquellos que corresponden plenamente a las exigencias intuitivas y que tienen por lo tanto una aceptación inmediata fuerte (Fischbein, 1985 y 1992).

Se habla también, en ocasiones, de *modelos parásitos.* Didácticamente conviene dejar imágenes aún inestables, en espera de poder crear modelos adecuados y significativos lo más cercano posible al saber matemático que se quiere alcanzar.

Más "fuerte" es el modelo intuitivo, más difícil es desestabilizarlo para *acomodarlo* a una nueva imagen. En resumen, la imagen – misconcepción no debe convertirse en modelo dado que, por su misma naturaleza, se halla aún en espera de una definitiva consolidación.

Se trata entonces de no dar informaciones equivocadas o distorsionadas; no solo no darlas de forma explícita, sino de hecho evitar que se formen implícitamente para impedir la formación de modelos parásitos. Una sólida competencia del profesor en Didáctica de la Matemática es, en este caso, de gran ayuda.

Sin embargo es obvio que aquí no se trata solo de significados formales e intuitivos de la adición. Aquí se trata también, y quizás particularmente, de una dificultad de gestión "narrativa" del texto. Este tipo de pruebas, desde un punto de vista didáctico aplicativo, evidencia por lo menos que es falso el criterio que la dificultad en la resolución de problemas está en el aumentar el número de las operaciones en dicho proceso. Se puede verificar fácilmente que existen problemas que requieren de dos o más operaciones y sean más fáciles de resolver que P. B; P. C, además, aun teniendo una única operación, queda fuera del alcance de toda la escuela elemental.

La resistencia al uso de la adición en situaciones consideradas de no congruencia entre significado formal y significado intuitivo, son testimoniadas no sólo en la escuela primaria, sino también en toda la escuela media. Véase por ejemplo Billio et al. (1993), donde se analizan situaciones explícitamente denunciadas por los alumnos en oportunas entrevistas.

Y tanto sería lo que habría de decir acerca de una situación aún más complicada ligada a los *dos significados intuitivos* de la división, de la cual apenas he hecho referencia antes, aquel de repartición y aquel de contenencia; ambos corresponden a un único *significado formal*. En más de una ocasión he encontrado maestros de primaria que me confesaban de tratarlos separadamente, como si fueran dos operaciones diversas, «para evitar complicaciones en el alumno».

Bibliografía

Adda, J. (1987). Erreurs provoquées par la représentation. Atti CIEAEM. Sherbrooke: Univ. di Sherbrook.

Aglì, F., D'Amore, B. (1995). *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia*. Milán: Juvenilia.

Arrigo, G., D'Amore, B. (1992). *Infiniti*. Milán: Franco Angeli.

_____ (1999). "Lo vedo, ma non ci credo". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22B, 5, 465-494. [En versión inglesa: "I see it but I don't believe it…". Epistemological and didactic obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Scientia Paedagogica Experimentalis* (Bélgica), XXXVI, 1, 1999, 93-120; un resumen del texto ingles aparece en: *Proceedings of the 2nd Mediteranean Conference on Mathematics Education*, 7-9 january 2000, Nicosia, Cyprus, vol. II, 371-383; otro resumen del texto ingles aparece en: Proceedings of CERME1, Osnabrück, 1998. La versión en idioma español: "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática*, *11* (1), México, 5-24].

_____ (2002). "Lo vedo ma non ci credo…", segunda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-57. [Un amplio resumen en idioma español en la revista *Educación matemática* (2004)].

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Billio, R., Bortot S., Caccamo I., Giampieretti M., Lorenzoni C., Rubino R., Tripodi, M. (1993). Sul problema degli ostacoli intuitivi nell'uso dell'addizione. *La matematica e la sua didattica*. 4, 368-386.

Brousseau, G. (1972a). Les processus de mathématisation. *Bulletin de l'association des professeurs de mathématique de l'enseignement public*. Numéro Spécial: *La Mathématique* à l'école élémentaire. Este texto fue publicado en las Actas del Congreso de Clermont Ferrand de 1970.

_____ (1972b). Vers un enseignement des probabilités à l'école élémentaire. *Cahier de l'IREM de Bordeaux*. 11.

_____ (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes Rendus de la XXVIII e Rencontre de la CIEAEM*. Louvain la Neuve, 101-117.

_____ (1983). Obstacles Epistémologiques en Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4* (2), 165-198.

_____ (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7* (2), 33-115.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

D'Amore, B. (1987). Motivazioni epistemologiche che stanno alla base delle scelte didattiche operate nelle attività educative in Italia, dalla scuola dell'infanzia al biennio superiore. *Actas del I Congreso Internacional sobre Investigación en la didáctica de las Ciencias y de la Matemática*. Valencia 1987, 324-325.

_____ (1993a). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, *2*, 14-16.

_____ (1993b). *Problemi. Pedagogia e psicologia della Matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Angeli. II ed. it. 1996. [Ed. en idioma español: Madrid: Síntesis, 1996].

_____ (1996). L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi. Un fertile campo per la ricerca in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, *3*, 322-335. [En idioma español: El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. *Epsilon*. 36, 1996, 341-360].

_____ (1998b). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L'educazione matematica*. 1, 728 [texto bilingüe, italiano e inglés]. [En español: *Uno,* 15, 1998, 63-76].

_____ (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate.* 22A, 3, 247276. Un amplio resumen de este artículo ha sido publicado en idioma español en: *Resúmenes de la XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana, 12-16 julio 1999, 27. [Traducción completa en idioma español: La escolarización del saber y de las relaciones: los efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas. *Relime*. México, vol. 3 (3), 2000, 321-338].

_____ (1999b). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [En español (2006): Didáctica de la Matemática. Bolgotà: Magisterio].

_____ (2000a). La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matemática*, México. 12, 1, 2000, 39-50.
_____ (2000b). Problems of Representing Concepts in the Learning of Mathematics. En: *Proceedings of the International Conference: Mathematics for living*. Amman, Jordania, noviembre 18-23 2000, 1-5.
_____ (2000c). Che cosa vuol dire apprendere un concetto matematico. En: *Atti del Convegno Internazionale "Matematica 2000"*, Bellinzona (Suiza), 28-29 agosto, número especial 41, *Bollettino dei docenti di matematica*. 2000, 87-92.
_____ (2001a). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 31-56. [En idioma español: Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos, *Uno*. Barcelona, 27, 2001, 51-76].
_____ (2001b). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001*. Bologna: Pitagora.
_____ (2001c). Problemas de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas a la vuelta del milenio. *Actas del III Simposio Internacional de Educación Matemática*. Chivilcoy (Argentina), 1-4 mayo 2001.1-14. Texto de la conferencia inaugural en calidad de Presidente honorario.
_____ (2001d). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173. [En idioma francés: Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Bélgica. XXXVIII, 2, 2001, 143-168. En idioma español: Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución, *Uno*. Barcelona, España. 35, 90-106, 2004.]
_____ (2002a). La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matemática, *Scuola & Città*, 4, octubre 2002, 56-82. [En alemán: Die Mathematikdidaktische forschung als Epistemologie des Mathematiklernens. In: AA. VV. (2004). *Didaktik der Mathematik in der Primärschule*. Lussemburgo: Ministère de l'Éduca-

tion nationale de la Formation professionelle et des Sports, 65-98 ISBN 2 87995-108-9].
_____ (2002b). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. 11, 63-71.
_____ (2003). La complexité de la noétique en mathématiques ou la raison de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. Canada. *23*(1).
_____ (2004). Il ruolo dell'epistemologia nella formazione degli insegnanti di matematica della scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*, 4, 4-30. [Existe una versión en idioma español en publicación: *Epsilon*, España].
_____ (2005). Pipe, cavalli, triangoli e significati. Contributo ad una teoria problematica del significato concettuale, da Frege e Magritte, ai giorni nostri. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. [Existe una versión en idioma español: *Números*. [Tenerife, Spagna]. 61, 3-18].
_____ (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.
D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estevéz, M., Fandiño Pinilla, M.I., Piatti, A., Rojas, P.J., Rodríguez, Bejarano, J., Romero, Cruz, J.H., Sbaragli, S. (2004). Il "senso dell'infinito". *La matematica e la sua didattica*, *4*, 46-83.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objects mathématiques. En: Gagatsis A. (ed.). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*, Nicosia (Chypre), Intercollege Press Ed. Actas del "Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Universidad de Chipre, 22 junio-6 julio 2001, 111-130.
_____ (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática*, *14* (1), México, 48-61.
_____ (2003). La formazione iniziale degli insegnanti di Matematica. En: Fandiño Pinilla (ed.) *Formazione iniziale degli insegnanti di Matematica. Una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.
_____ (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50. [En español: *Espilon*. 58, 20, 1, España: 25-43].
_____ (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*, *2*.

D'Amore B., Franchini D., Gabellini G., Mancini M., Masi F., Matteucci A., Pascucci N., Sandri P. (1995). La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 18A, 2, 131-146.

D'Amore B., Martini B. (1997). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La Matematica e la sua didattica*, 2, 150-175. [En idioma español: Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos, *32*, 1997, 26-32. En idioma inglés: The Didactic Contract, Mental models and Intuitive models in the resolution of standard scholastic problems. En: Gagatsis A. (ed.) (1999). A multidimensional approach to learning in mathematics and science. Nicosia (Chypre): Intercollege Press. 3-24. En lengua francesa: Contrat didactique, modèles mentaux et modèles intuitifs dans la résolution de problèmes scolaire standard. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Bélgica. xxxv, 1, 1999, 95-118].

D'Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPS) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica*, 2, 144-189. [En lengua española: Producciones escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas. *Espsilon* (Cádiz, Spagna), *18*(2), 53, 243-262, 2003].

D'Amore B., Sandri P. (1993). Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La matematica e la sua didattica*. 3, 348-353. [Reestampado en: Gagatsis A. (ed.) (1994). *Didactiché ton Mathematicon*. Erasmus ICP 93G 2011/II, Thessaloniki. En griego 247-252, en francés 579-584].

_____ (1996). Fa' finta di essere... Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19A. 3, 223-246. [En idioma español: Imagina que eres… Indagación sobre el uso de la lengua común en contexto matemático en la escuela media. *Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática*. Bogotá, Colombia. 4, 3, 1999, 207-231].

_____ (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*, 1, 4-18.

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, 2.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berna: Peter Lang. [Trad. en idioma español: *Sémiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle (Colombia), 1999].

_____ (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en didactique des mathématiques.* 16, 3, 349-382.

_____ (1998). Signe et object (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 6, 139163.

Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

_____ (ed.) (2003). *Formazione iniziale degli insegnanti di Matematica. Una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.

_____ (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Filloux J. (1973). *Positions de l'enseignant et de l'enseigné*. París: Dunod.

Fischbein E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. En: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli. 122-132.

_____ (1992). Intuizione e dimostrazione. En: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. (D'Amore B. ed.). Bologna: Pitagora. 1-24.

Giovannini A. (Enriques F.) (1942). L'errore nelle matematiche. *Periodico di matematiche*, IV, XXII.

Giordan A., De Vecchi G. (1987). *Les origines du savoir*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Godino J. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante*. 2, 2, 69-79.

_____ (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des mathématiques*, 22, 23, 237-284.

Godino J., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des mathématiques*, *14* (3) 325-355.

_____ (1998). The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta-analysis of three investigations. En: Malara N.A. (ed.) (1998). *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline. Proceedings of WG 25 ICME 8, Sevilla Julio 1996*. Modena: CNR-MURST-University of Modena, 13-22.

IREM Grenoble (1980). Quel est l'âge du capitaine? *Bulletin de l'APMEP*, 323, 235-243.

Moreno Armella L. (1999). Epistemologia ed Educazione matematica. *La matematica e la sua didattica, 1*, 4359.

Peano G. (1924). *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*. Torino: Paravia.

Radford L. (2002a). The seen, the spoken and the written: a semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge [1]. *For the Learning of Mathematics*, *22* (2), 14-23.

_____ (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs: a semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, *5* (1), 37-70.

Sarrazy B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*, 112, 85-118.

Sbaragli S. (1999). Una esperienza sulla ipotesi "intra-, inter-, trans-figurale" di Piaget e Garcia nella scuola dell'infanzia. *La matematica e la sua didattica*, *3*, 274-312.

_____ (2003). Le convinzioni degli insegnanti elementari sull'infinito matematico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, I parte: *26 A* (2), 155-186; II parte: *26 A* (5), 573-588.

_____ (2004). Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico. Tesis de doctorado. Universidad de Bratislawa. En italiano y inglés: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm

_____ (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*, *1*.

Schoenfeld A.H. (1987a). What's all the fuss about metacognition? En: Schoenfeld A.H. (ed.) (1987b). *Cognitive science and mathematics education.* Hillsdale N.J.: Lawrence Erlbaum Ass, 189-215.

Vergnaud G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En: Carpenter T.P., Moser J. M., Romberg T. A. (eds.) (1982). *Addition and substraction*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Ass. Inc., 39-59.

_____ (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*, 133-169.

Vygotski, L.S. (1962). *Thought and language*. Cambridge: MIT Press. [Se trata de un resumen de la edición original en ruso. Colección de artículos publicados en Moscú en 1956].

Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos

Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

Varias formas de entender el concepto de fracción

De la literatura internacional emerge claramente un primer problema notable, no sólo terminológico sino también matemático, que quiero afrontar: las posibles interpretaciones del concepto de "fracción". Para el aspecto didáctico véase Fandiño Pinilla (2009).

La discusión propuesta acá, sin embargo, tiene profundas repercusiones sobre la acción didáctica. De hecho, generalmente, al inicio de la aventura cognitiva sobre las fracciones, se propone la "definición" tomada de un texto en italiano de 1° media, (6° grado, o primer grado de bachillerato); haciendo el recorrido mucho más gradual, menos rápido, más rico de ejemplos, es decir análogo completamente al que se hace en la escuela primaria, por lo general en 3°, o máximo, en 4°.

Tras haber hecho un ejemplo clásico de repartición de una pizza en cuatro partes *iguales,* el libro prosigue así:

> Se tiene una unidad-todo y se divide en partes iguales; cada una de estas partes es una "unidad fraccionaria"; por ejemplo, si la unidad-todo se dividió en 4 unidades fraccionarias, entonces cada una de ellas se llama "un cuarto" y se escribe $\frac{1}{4}$. Si de estas unidades se toman algunas, entonces la parte que se tomó de la unidad-todo se llama

[2] Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna (NRD), Italia. Correo-e: bruno.damore@unibo.it

fracción. En nuestro ejemplo, tomamos 3 unidades fraccionarias $\frac{1}{4}$, entonces se dice que se tomó la fracción "tres cuartos" que se escribe $\frac{3}{4}$.[3]

La gran mayoría de los autores que conocimos en los capítulos precedentes, desde hace más de 35 años evidencian que, detrás del término "fracción", se esconden varias acepciones y esto genera una primera confusión: se pretende dar una "definición" inicial definitiva de este objeto, pero esta elección luego no tiene la fuerza para satisfacer todos los significados que el término asumirá en el curso de los estudios. Dado que dicha "definición" inicial es fácilmente comprensible, entra de inmediato en el cognitivo más profundo, produce (demasiado pronto) un modelo, como veremos, y después no se tiene la oportunidad, ni la fuerza, ni el valor para modificarla, para adecuarla a las distintas necesidades que poco a poco se presentan.

Enseguida me limitaré a enumerar los principales significados que la palabra "fracción" puede asumir en matemática y por lo tanto en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los significados aquí presentados y discutidos brevemente constituirán el punto de partida para muchas de las reflexiones didácticas sucesivas. (La lista no sigue un orden particular).

Para evitar continuas referencias bibliográficas, se aclara que se hace uso de toda la literatura específica sobre este tema, que fue examinado ampliamente por varios autores a partir de los años 70 y 80.

La fracción como parte de una unidad-todo, a veces continua, a veces discreta

Para iniciar, notemos que, si se considera la fracción como una relación parte-todo, hay una gran diferencia dependiendo de si el "todo" (la unidad) está constituido por algo continuo o si está constituido por un conjunto discreto.

Si el todo es una unidad continua (la superficie de un rectángulo o una pizza o una torta, la longitud de un segmento, el volumen de un cuerpo, etc.), hallar los a b-ésimos (es decir hallar la fracción $\frac{a}{b}$) puede hacerse siempre (teóricamente: porque hallar realmente los $\frac{423}{874}$ de una pizza sería concretamente imposible). Pierde sentido el caso en el que $a > b$, las llamadas *fracciones impropias*, para las cuales la definición (dividir la unidad en b partes

[3] La página está ilustrada con un rectángulo dividido en cuatro partes congruentes de las cuales se han coloreado tres.

iguales y tomar *a* partes) pierde su significado intuitivo: ¿cómo se hace en efecto, para dividir una unidad en cuatro partes y tomar cinco? Hay quien responde que, en tal caso, no hay una sola pizza, sino dos; pero entonces ¿la unidad es *la* pizza o son *las* pizzas? Una situación como ésta puede generar confusión. A veces la unidad es uno, a veces es más de uno; en el caso de las fracciones impropias, las pizzas son dos pero la unidad es una.

Si el todo es una unidad discreta (12 personas o 12 canicas o 12 juguetes), sigue sin tener sentido la fracción impropia, pero hay más: incluso las fracciones propias están en riesgo; encontrar los *a b*-ésimos depende de la relación entre 12 y *b*. Por ejemplo se pueden hallar los $\frac{3}{4}$ de 12 personas (se trata de 9 personas), pero es imposible darle sentido concreto a los $\frac{3}{5}$. Sería necesario entonces distinguir: dada una unidad-todo discreta, existen algunas fracciones que tienen un sentido concreto y otras que no lo tienen. Hay más. Si queremos hallar los $\frac{6}{8}$ de 12 personas, a primera vista no se puede hacer debido a la imposibilidad de dividir 12 personas en 8 *partes*; pero un experto podría decir que la fracción $\frac{6}{8}$ se puede escribir en su forma equivalente $\frac{3}{4}$, haciendo posible hallar los $\frac{6}{8}$ de 12. Pero esta transición da por hecho un argumento que está en proceso de construcción; con frecuencia las construcciones de los dos conocimientos (fracción propia de un conjunto discreto y fracciones llamadas equivalentes) se sobreponen; el maestro cree poder basar un conocimiento sobre el otro, mientras el estudiante está construyendo los dos conocimientos contemporáneamente. Y esta sobreposición crea muchos problemas.

Es importante hacer notar otras dos incongruencias:

La primera se refiere al término *igual;* si queremos tomar los $\frac{3}{4}$ de 12 personas, ¿qué significa dividir las 12 personas en 4 partes *iguales*? ¿A qué se refiere esta *igualdad*? ¿Se está hablando del peso, de la altura, de la inteligencia..., o simplemente del número? Si hace referencia únicamente al número, este caso no tiene comparación en el caso de los ejemplos continuos... y sobre todo no tiene fundamento alguno la supuesta solicitud de que las partes sean *iguales.* La referencia a lo concreto (las personas) sirve sólo de obstáculo: estoy tomando una fracción del número 12, no de 12 personas.

La segunda hace referencia a la relación de “equivalencia” entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$; por lo general se deja llevar y se prosigue con la enumeración de fracciones “equivalentes”: $\frac{12}{16}, \frac{9}{12}, \frac{30}{40}, \frac{45}{60}$ y se termina diciendo: “y así sucesivamente hasta el infinito…”. ¿Hasta el infinito? Si tenemos 12 personas o cualquier otra agrupación finita ¡no tiene sentido! Una cosa es hacer afirmaciones puramente teóricas cuando se ha construido el *concepto*, y otra bien distinta es hacerlas en proceso de construcción conceptual.

En ambos casos, unidad continua o unidad discreta, es mejor resaltarlo en forma explícita, una vez asumida la definición recordada arriba no tienen sentido, desde un punto de vista lógico, las fracciones impropias o iguales a la unidad. Éstas necesitan una justificación específica, posible, por ejemplo, cuando la fracción finalmente se habrá transformado en un número y no será ya asimilada por el estudiante a una actividad concreta de partición de objetos o de conjuntos.

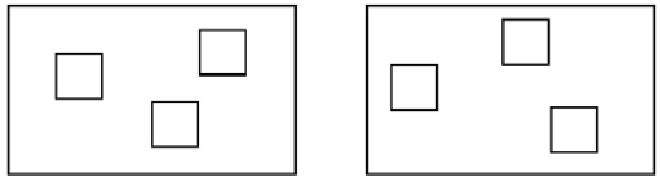
A propósito de las dificultades conceptuales relativas al argumento fracciones, una posterior complicación cognitiva está constituida, como ya vimos en distintas ocasiones, por el adjetivo "igual": "dividir una unidad en partes 'iguales'" es la solicitud preliminar a cualquier aproximación sobre las fracciones.

Supongamos que usamos como unidades pizzas o tortas; dividir en partes "iguales" es, desde el punto de vista del adulto, una idea abstracta; se hace referencia a un caso real, es cierto, a un objeto concreto, pero se le quiere considerar un aprendizaje abstracto de la forma más rápida. Pero el joven alumno, a quien la propuesta le fue planteada en situación real, hace referencia a ésta: una pizza cubierta de suculentos ingredientes tendrá que ser dividida, en la realidad, en partes *iguales*.

La cosa es más sutil e interesante de cuanto podría parecer; afrontarla requiere una reflexión más amplia. Empiezo desde muy lejos.

En el famoso experimento de Piaget y de sus colaboradores, en 1948, acerca de la idea de extensión de una superficie plana, se mostraba a niños muy pequeños dos rectángulos verdes idénticos que se proponían e interpretaban como prados (el verde era identificado con la hierba); sobre ambos se dispusieron algunos cuadrados blancos que representaban las bases de casitas sobre dichos prados. Este dispositivo buscaba verificar si los niños pequeños eran capaces de entender que si a superficies planas de igual extensión son sustraídas superficies planas de igual extensión, entonces las diferencias son también de igual extensión:

Si [(A es de igual extensión que B) y (C es de igual extensión que D)] entonces [A-C es de igual extensión que B-D].

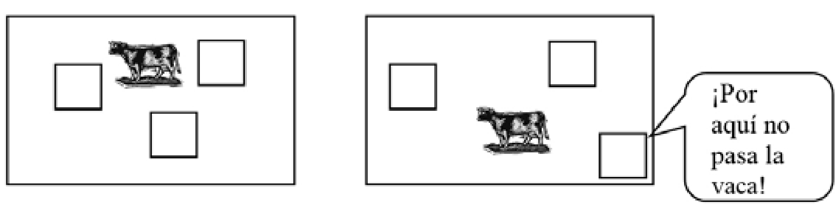


Asumiendo que alumnos muy pequeños no pudieran hacer uso de términos técnicos (rectángulo, cuadrado, superficie, extensión, diferencia de extensión, extensión semejante), el dispositivo original de los años 40 ofrecía una interpretación realista: casitas blancas con base cuadrada sobre campos de hierba de forma rectangular.

Para completar el cuadro realista, se colocaron sobre los dos rectángulos-campos pequeñas reproducciones idénticas de vacas y se planteaba la pregunta así: "¿En cuál de los dos campos la vaca podrá comer más hierba?".

Los adjetivos genéricos "grande, pequeño" sustituían los técnicos "más extenso, menos extenso". El dispositivo puesto en campo tenía un sello realista para permitir a los alumnos dar respuestas sensatas; pero en la interpretación de los experimentadores se celaba el deseo de tener respuestas abstractas, en el campo de la geometría, no en campo de la cría de vacas.

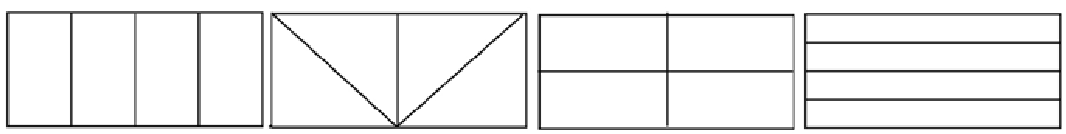
Sabemos que, sin embargo, los niños inmersos en la situación-modelo, daban respuestas absolutamente ligadas a la circunstancia real. Por ejemplo, si una "casa" era colocada *casi* sobre el borde del "campo" afirmaban que la hierba entre la casa y el borde no podía ser alcanzada por la vaca debido al tamaño de esta.



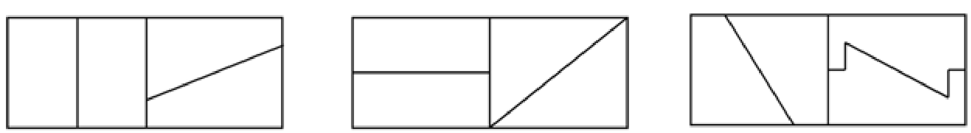
Las respuestas, por lo tanto, eran influenciadas de forma *negativa* por el modelo concreto propuesto. Por su naturaleza, si al niño se le propone un modelo concreto que representa hechos reales, sobre *ellos* centrará su atención, sobre los hechos reales, no sobre la abstracción a la cual el adulto está, en cambio, haciendo referencia implícita. Por lo que las respuestas no pueden ser interpretadas en clave abstracta, porque el niño respondió a las preguntas planteadas sobre el modelo concreto, interpretando la realidad.

Ahora, fortalecidos por esta famosa experiencia, regresemos a la pizza que debe ser dividida en partes "iguales"; el niño que naturalmente se ha involucrado con la situación real propuesta tenderá a cavilar sobre ésta, como haría en el restaurante en el caso concreto; si una pizza, aún cuidadosamente cortada a mitad, no presenta dos partes intercambiables sin problemas: ello depende de factores contingentes, por ejemplo de los ingredientes que cubren una "mitad" y la "otra mitad". Fue el adulto quien eligió el modelo *real*; ahora no puede hacer como si no pasara nada y pretender un comportamiento *abstracto*.

Supongamos entonces de considerar una unidad continua menos rica de referencias realistas, por ejemplo un rectángulo. Implícitamente, cuando el adulto propone al niño dividir el rectángulo en partes "iguales", con frecuencia se quiere hablar del área de ese rectángulo, de su superficie. Por una parte, entonces, ese término "iguales" podría y debería ser interpretado como "congruentes", "que se pueden sobreponer" (y muchos maestros de primaria y de secundaria lo interpretan así y obligan al estudiante a interpretarlo así).



Pero entonces una división del rectángulo en cuatro partes como las siguientes:



de forma rigurosa no sería una división permitida: las partes que aparecen no son *iguales;* entonces, ¿es o no es cada una $\frac{1}{4}$ de la unidad rectángulo del inicio?

Las cuatro partes no son "iguales" entre ellas, si interpretamos ese adjetivo como "congruentes", "que pueden sobreponerse"; pero en cambio, lo son, si damos una interpretación relativa a la extensión, al área.

La fracción como cociente

La escritura $\frac{a}{b}$ fue propuesta en precedencia en los términos de parte/todo: dada una unidad, dividirla en *b* partes (iguales, congruentes, que puedan sobreponerse, consideradas en últimas intercambiables) y tomar *a*; la unidad de partida podía ser continua, y por lo tanto producir pocos problemas; o también podía ser discreta, es decir un conjunto de *c* elementos, y por lo tanto producir problemas de "compatibilidad" entre *b* y *c.*

Pero es posible ver la fracción $\frac{a}{b}$ como una división no necesariamente efectuada sino simplemente indicada: $a \div b$; en este caso la interpretación más intuitiva no es la parte/todo, sino la siguiente: tenemos *a* objetos y los dividimos en *b* partes.

A veces, la operación de división indicada $\frac{a}{b}$ es también efectuada; por ejemplo, $\frac{3}{5}$ puede indicar una fracción parte/todo, una división indicada (3 objetos para distribuir entre 5 personas) pero también el cociente 0,6 si tal división es efectuada.

Sólo que la escritura 0,6 no produce ya el efecto operatorio que producía la fracción $\frac{3}{5}$ que la originó, esto en, por lo menos, dos sentidos distintos ($\frac{1}{5}$ tres veces, o 3 objetos de distribuir en 5 personas).

Parece entonces evidente que la misma escritura $\frac{3}{5}$ está indicando situaciones que, a los ojos de quien aprende, puede tener interpretaciones muy distintas.

La fracción como relación

A veces la fracción $\frac{a}{b}$ se usa explícitamente para indicar la relación entre *a* y *b* y entonces se escribe *a:b*; el signo ":" sustituye "–" no tanto y no sólo indicando la operación de división (indicada solamente o por efectuar) sino también al hacer explícito un sentido de relación entre dos magnitudes que están entre ellas como *a* está a *b.*

Así, si tenemos un segmento AB de 20 cm de largo y uno CD de 25, el primero son los $\frac{4}{5}$ del segundo, lo que puede escribirse: $AB=\frac{4}{5}CD$ o bien AB:CD=4:5. La escritura 4:5 indica la relación entre las longitudes de los dos segmentos.

Nada impide pensar en ejemplos discretos, un conjunto P de 20 objetos y uno Q de 25 objetos; es obvio que la relación entre las cantidades de P y de Q sigue siendo de 4:5 que con frecuencia se lee "de 4 a 5".

Si se toma la longitud del segmento CD como unitaria o la cantidad de objetos del conjunto Q como unitaria, entonces la longitud de AB o la cantidad de objetos del conjunto P se puede expresar con la fracción $\frac{4}{5}$, restituyendo a esta escritura una interpretación bastante cercana a la parte/todo.

Pero es mejor advertir que, en la interpretación que aquí estamos discutiendo, esto sería forzado; intuitivamente se trata de interpretaciones distintas.

Un modelo matemático más adecuado de esta interpretación invoca la proporción; G_1 y G_2 pueden ser dos magnitudes variables que pueden asumir valores distintos pero recíprocamente unidos siempre por la misma relación, expresable a través de una tabla numérica, por ejemplo:

G_1	8	12	16	...	*a*
G_2	10	15	20	...	*b*

Aparece claramente que la relación que une G_1 y G_2 es $\frac{4}{5}$ aunque, probablemente, no tendría sentido declarar que $\frac{G_1}{G_2}=\frac{4}{5}$. En tal caso es frecuente escribir como proporción: G_1:G_2=4:5.

Por otro lado, una proporción no es más que la igualdad de dos razones; por ejemplo: 4:5=12:15 es entonces la declaración de que las dos fracciones $\frac{4}{5}$ y $\frac{12}{15}$ son dos escrituras distintas del mismo número racional [es decir que las parejas de naturales (4; 5) y (12; 15) pertenecen a la misma clase de equivalencia].

No se puede negar que pusimos en evidencia otro uso semántico del término "fracción" que presenta aspectos particulares.

Entre otras características fuertes de la fracción como relación está el hecho que numerador y denominador aparecen como intercambiables y no tienen ya esa valencia semántica tan estricta que tuvieron hasta ahora. Si la relación que une G_1 y G_2 es como "3 es a 4", es decir $\frac{3}{4}$, entonces se tiene también que G_2 es a G_1 como "4 es a 3" es decir $\frac{4}{3}$. El significado de estas dos afirmaciones es el mismo, por lo que las especificidades de numerador y denominador son, en cierto sentido, intercambiables.

La fracción como operador

Con mucha frecuencia la fracción es considerada un operador multiplicativo, es más, este es uno de sus significados más usados en la escuela. Por ejemplo:

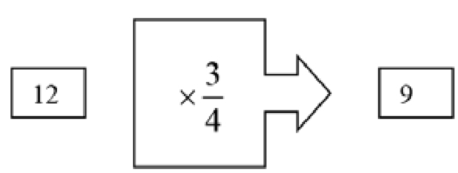
"Encontrar los $\frac{4}{5}$ de 20 peras" significa operar como sigue: $(20\div5)\times4$ peras; "encontrar un segmento CD que sea los $\frac{4}{5}$ de un segmento AB que mide 20 cm" lleva a decir que CD medirá 16 cm.

Es comprensible que únicamente haciendo un esfuerzo se puede admitir que se aprovechó la definición inicial de fracción, si bien nos puede reconducir a ella. En el caso del segmento, por ejemplo, no basta tomar 5 partes "iguales" de AB, sino que es necesario conservar propiedades geométricas que se dan por hechas, por ejemplo la adyacencia de los 5 segmentos en los que dividimos AB. El problema propuesto, entonces, no está bien planteado; la pregunta debería haber sido: "Encontrar la longitud de un segmento CD que…" porque estamos hablando de longitud y no de segmento.

La fracción como operador, entonces, actúa sobre los números puros más que sobre los conjuntos o sobre los objetos; es, de hecho, una nueva operación que combina división y multiplicación.

A veces se presentan situaciones complicadas: "Hallar los $\frac{4}{5}$ de un conjunto de 22 peras" presenta un problema de intuición, dado que 22 no es divisible por 5. Una vez que se pierde el aspecto intuitivo, nada evita, entonces, que se opere intercambiando entre ellas las dos operaciones: $(4\times22)\div5$. La cosa es lícita, claro, y produce el mismo resultado numérico, pero muestra además que la fracción como operador *no* es la fracción como la entendimos al inicio. La relación parte/todo se perdió.

En libros de texto enfatizan la fracción como operador con esquemas como el siguiente:



Resulta evidente que la definición inicial no es coherente con la interpretación de la fracción como operador.

La fracción en probabilidad

Buscamos evaluar la probabilidad según la cual, lanzando dos dados, se obtiene un múltiplo de 4. Los casos posibles son 36, los eventos favorables son 9 (que salga 4, que se presenta en 3 casos; 8, que se presenta en 5 casos; 12, que se presenta en 1 caso). Entonces la probabilidad de ese evento se puede expresar con la escritura $\frac{9}{36}$, es decir el número de casos favorables al evento, con respecto al número de casos posibles.

Así, $\frac{9}{36}$ expresa una medida, el grado de posibilidad de satisfacción del evento, un límite para apostar, la probabilidad; dicha fracción sí es equivalente a $\frac{1}{4}$, pero sólo aritméticamente, porque intuitivamente esta transformación dice poco. Dice mucho más otra fracción equivalente: $\frac{25}{100}$, especialmente si la escribimos de una forma más común: 25%.

La fracción en los puntajes

Laura trata de darle al blanco y tiene a disposición 5 tiros; centra el objetivo 2 veces; descansa un poco y, en la segunda tanda, tiene a disposición 3 tiros; centrando el blanco otras 2 veces.

Andrés centra el objetivo 3 veces de 5 en la primera tanda y en la segunda tanda sólo una vez.

Entonces tanto Laura como Andrés dieron en el blanco 4 veces sobre 8 lanzamientos de que disponían. Expresemos "matemáticamente" lo que sucedió.

Laura 1°	Laura 2°	Total Laura	Andrés 1°	Andrés 2°	Total Andrés
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{8}$

Esta descripción, ¿le parece aceptable al lector? Debemos tener muchas dudas al aceptar esta descripción del juego de Laura y Andrés porque, aceptándolo, nos encontramos frente a una "adición" entre fracciones estructurada así: $\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{4}{8}$, bastante extravagante… y aun así $\frac{4}{8}$ es equivalente a $\frac{1}{2}$ y no se puede negar que Laura golpeó el blanco la mitad de las veces que lanzó…

Las “fracciones” en los puntajes son un objeto matemático que tiene características propias, intuitivas, pero poco cercanas a la definición que fue dada al inicio.

La fracción como número racional

En este caso se da particular atención a cuestiones que tienen que ver con la operatividad: equivalencia entre fracciones, adiciones entre fracciones etcétera.

El número racional 0,5, por ejemplo, no es otra cosa que la clase de equivalencia [(1; 2), (2; 4), (4; 8)…, (3; 6), (6; 12), (9; 18), (5; 10), (10; 20)…] formada por todos y sólo aquellas infinitas parejas ordenadas de números $(a; b)$, tales que: $a \in N$, $b \in N-\{0\}$ y entre los cuales aparece el par (1,2) o bien, si se prefiere, $b=2\times a$.

Es fácil comprender que no podemos cargar, especialmente en un aula escolar, a ningún nivel, con este lastre; por lo cual se elige con frecuencia un representante de esta clase, la mayoría de las veces aquél “reducido a los términos mínimos”, o la “fracción irreducible”, en nuestro caso (1; 2), y se usa éste al puesto de la clase de equivalencia. Es más, escribiendo directamente en forma fraccionaria $\frac{1}{2}$, arrastramos con nosotros la secuela infinita de las parejas-fracciones equivalentes.

Por lo que, tanto 0,5 como $\frac{1}{2}$, se aceptan como representantes del mismo número racional, aun siendo originalmente, entes *esencialmente* distintos. De otra parte, ¿qué significaría, entonces, operar entre racionales?

La fracción como punto de una recta orientada

No es extraño encontrar en los libros de texto o en las actividades de aula la siguiente propuesta: “Ubicar $\frac{3}{4}$ en la recta numérica”. Limitémonos a la semirrecta racional positiva rQ^a para disminuir las complicaciones.

Responder a esta pregunta significa evaluar aquella fracción como si fuera un número racional, aplicar la relación de orden en rQ^a y diseñar un circulito o una muesca (que indicará dicha fracción) entre el origen (0) y la unidad (1) en una posición apropiada y oportuna (haríamos lo mismo si, en cambio de $\frac{3}{4}$, se propone ubicar el número decimal correspondiente 0,75).

En tal caso, la fracción es vista como un valor-punto sobre la recta orientada, mucho más cercana a ser un número racional que una fracción.

Cuando escribimos, de hecho, $\frac{3}{4}<\frac{6}{7}$, no estamos evaluando el hecho de que si tomamos los $\frac{3}{4}$ de la misma unidad-todo obtenemos menos que si tomamos los $\frac{6}{7}$, por el contrario, estamos tratando directamente las fracciones como números racionales. Si queremos disponer las dos fracciones sobre la recta numérica, sabemos que $\frac{3}{4}$ estará *antes* de $\frac{6}{7}$. Para verificar la exactitud de lo que estamos diciendo y/o para disponer bien los puntos sobre la semirrecta, transformaremos las dos fracciones en otras equivalentes pero más oportunas: $\frac{21}{28}$ e $\frac{24}{28}$. Así todo resulta más evidente.

La fracción indica en este caso una distancia, la distancia entre el origen y el punto-fracción. Obviamente se trata de una distancia relativa, dado que depende de la unidad de medida.

La fracción como medida

Sobre las botellas de vino con frecuencia se lee 0,75*l,* que indica una cantidad, una medida, en la unidad decimal *litro*. Cualquier persona está en capacidad de entender que se trata de $\frac{3}{4}$ de un litro. Sin embargo, ¿se trata de una fracción en el sentido primitivo (una unidad-todo dividida en 4 partes *iguales* de las cuales se tomaron 3) o simplemente de un número para expresar una cantidad? Una cosa es tener una botella graduada de 1 litro y decidir llenar los $\frac{3}{4}$, y otra bien distinta es tener *una* botella de vino que *ya* tiene como medida 0,75.

Decidimos comprar 2 lápices que cuestan 0,75€ cada uno. Es difícil pensar en transformar este 0,75 en $\frac{3}{4}$ de 1€, y sin embargo es así. El gasto será de 1,5€, sin necesidad de recurrir a las fracciones que complicarían inútilmente la cuestión.

La cantidad de vino en la botella y el costo de un lápiz son medidas; a veces tiene sentido pensarlas como números racionales, a veces como fracciones, pero en ningún caso es necesario o conviene hacer referencia a la definición original de fracción. Es mucho más espontáneo un uso directo de la medida así como viene indicada.

La fracción indicador de cantidad de elección

Se quiere premiar los clientes del Gran Almacén y el director decide hacer un descuento escogiendo casualmente los clientes: 1 cada 10; el primero en entrar recibe un bono, luego el 11-écimo, luego el 21-ésimo y así sucesivamente. Por lo tanto, uno cada diez. Al final, ¿cuántos clientes habrán recibido el bono? Es obvio $\frac{1}{10}$. En tal caso, la fracción $\frac{1}{10}$ significa más cosas: que el bono fue dado a $\frac{1}{10}$ de los clientes del día (redondeando por defecto: si los clientes fueron 80, 7 recibieron el bono; si fueron 81 o 88, el bono lo reciben 8); pero $\frac{1}{10}$ significa también, en este caso, "1 cada 10" que no es, estrictamente, la fracción que pretende dividir una unidad-todo en 10 partes iguales.

La fracción como porcentaje

Este punto ya lo mencioné a propósito de la probabilidad y por lo tanto lo trataré de forma breve.

De vez en cuando es más fácil expresar 75% bajo la forma de fracción $\frac{75}{100}$ o $\frac{3}{4}$, a veces conviene dejarlo indicado bajo forma de porcentaje, y otras veces es preferible el número decimal 0,75. En el caso de la botella de vino serían ridículas las dos primeras escrituras y por lo tanto se privilegia la tercera.

En las cosas que tienen que ver con la probabilidad, es más intuitivo expresar dichas medidas con una de las dos primeras escrituras. Si se obtiene un préstamo en el banco, el interés se expresa en porcentaje: 3,5%.

En conclusión, aunque las escrituras matemáticas resultan formalmente equivalentes, no son del todo equi-significantes en la praxis cotidiana; lo que significa que hay *significados distintos* que cada uno de nosotros reconoce dentro de las distintas variedades de escrituras formales.

La fracción en el lenguaje cotidiano

Muchos de los investigadores que se ocupan de la didáctica de las fracciones actualmente se inclinan por un primer contacto "informal", como es, después de todo, el estilo didáctico más difundido y generalizado hoy en día.

Puede por lo tanto ser de ayuda un parágrafo en el cual se exploran distintos campos y distintos usos de las fracciones en la vida diaria; el estudiante debería controlar lingüística y cognitivamente estos usos y proponer algunos propios, hasta alcanzar una conceptualización estable y significativa del término; sobre esta conceptualización se podrá, en un segundo momento, *construir* un conocimiento sucesivo. Es posible tomar unos ejemplos: en la lectura del reloj, en música, en la práctica cotidiana.

Bibliografía

Fandiño Pinilla, M. I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio. [Prefacios de Athanasios Gagatsis y, de la edición en idioma español, de Carlos Eduardo Vasco Uribe], 222 páginas. ISBN: 978-958-20-0970-0.

Learning and teaching of Mathematical Modeling Chances and challenges for a broad mathematics Education in School

Rita Borromeo Ferri[4]

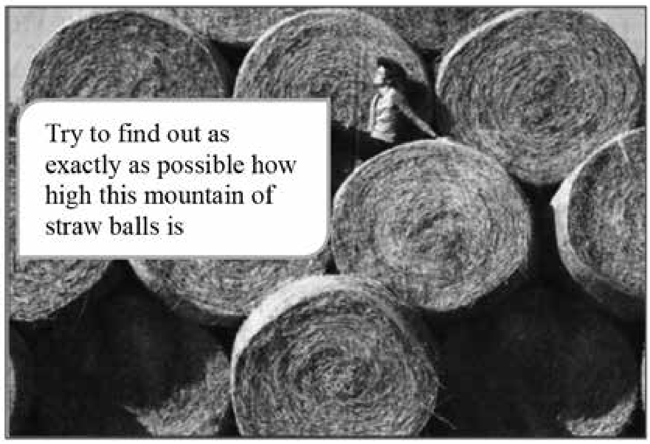
Abstract: For the learning and teaching of mathematics it is important, that pupils do not see mathematics as a subject in whom they only get to know about formulae or calculating numbers. Mathematics and thus practicing mathematics in several professions is part of the real world. Often pupils from primary up to secondary school do not get to know about the role mathematics plays in the real world. So it is part of the teacher to establish real world connections within mathematical classroom practice. In this paper I like to clarify what mathematical modeling means and show examples of modeling problems with a focus on elementary school. Finally a model of teaching competencies for mathematical modeling is presented. Chances and challenges for this topic will become obvious for teachers and learners.

What does mathematical modeling mean?

In the didactical discussion mathematical modelling means, pragmatically expressed, the solution of real life problems with the help of mathematical models. What does that mean in detail? Mathematical modelling is a process connecting real world and mathematics in both directions: from reality to mathematics and —that is important— back from mathematics to reality. Mathematical modeling does not mean to have a "pseudo realistic problem", in which all data are given or you only have to exercise

[4] University of Kassel, Germany.

algorithms. Mathematical modeling is a challenge for students on several levels, because the students work on questions out of the reality for which they have to apply mathematics. In which way a modeling problem can be a challenge and how these transition processes between reality and mathematics become clear you can understand much better while solving the following modeling task "Bale of straw" (DISUM-project, 2007).



For getting a better understanding what mathematical modeling means a deeper view into the several phases of the modeling cycle is needed. Along the modeling problem "Bale of straw" the process is illustrated according to phases of the "Diagnostically modeling cycle" (Borromeo Ferri, 2007) used in teacher education.

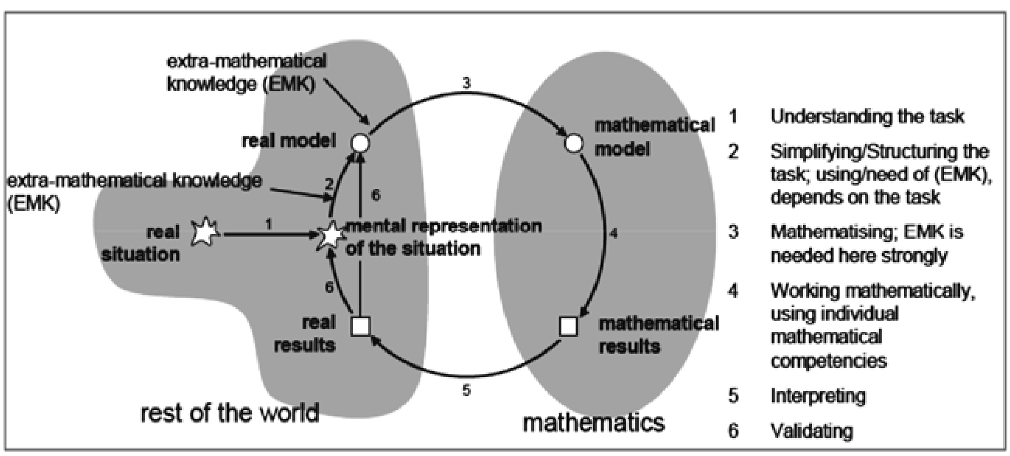


Fig. 1: Mathematical Modeling Cycle under a cognitive perspective (Borromeo Ferri, 2007).

Real Situation (RS)
The real situation of the “Bale of straw” problem becomes very visible through the picture. Therefore the given problem out of the reality (represented through pictures or text) is called real situation.

Mental Representation of the Situation (MRS)
The mental representation of the situation is very individually and consists of two parts:

1. Associations of the individual, because of the given real problem: If you think back at your solving process perhaps you got associations to the summer, referring to own experiences with straw bales etc.
2. Understanding of the problem: The individuals have to understand the task that they have to determine the height of the straw bale mountain.

Real Model (RM)
For getting a real model you have to simplify and structure your mental picture and thus the whole given real situation more on. One can think of circles instead of straw bales and perhaps you can draw them down for a real model. If you think about the woman sitting on the straw bales and take into account that you need the woman for solving the problem, then she can be simplified as a line. Simplification of the real situation and making assumptions are important, otherwise it is difficult to use or to “find” mathematics, which helps you to solve the problem. One assumption is that the height of the woman is approximately 1.7 m. This can be used to estimate the diameter of a straw bale.

Extra-Mathematical Knowledge (EMK)
As you recognized a lot of relevant data are not given in the task (e.g. the height of the woman or the diameter of a straw bale), therefore extra-mathematical knowledge is needed. The level of extra-mathematical knowledge in this task is not very high compared to other modelling problems, but this always depends on the personal experience one has to the given real context. Anyway one can suppose that a lot of pupils (living in the city) have seen these straw bales from a distance while driving in the car, but sitting on it or touching them is surely not the rule. Perhaps it is easier

to know the height of a woman as the height of a straw bale. Both aspects can be used as a step to build a real model and then a mathematical model. You see that there is a demand of everyday knowledge within modelling problems.

Mathematical Model (MM)
Normally a real problem cannot be solved only with one mathematical model, because of its complexity, but with different models and with multiple solution processes. Concerning the problem "Bale of straw" two possible mathematical models are described:

- Model 1 (Multiple addition of the height of the woman):
  Woman's height of approximately 1.7 m can be piled and then added up to get the height of the straw bale mountain.
- Model 2 (Pythagoras Theorem):
  Using the estimated height of the woman (1.7m) for getting the approximately height of one straw bale (1.5m) one can use Pythagoras Theorem. Taking into consideration those straw bales in lines below will be pushed because of the weight of the other bales, one can build a model with a radius of only 3/4 of a straw bale.

Inner-mathematical competencies such as Pythagoras Theorem, fractional arithmetic, estimating are needed to get mathematical results.

Mathematical Results (RS)
According to the mathematical models, the mathematical results are for both very close:

Model 1: $x \approx 5{,}2\text{m} + 1{,}5\text{m} = 6{,}7\text{m} \approx 7\text{m}$
Model 2: height $\approx 4 \cdot 1{,}7\text{m} = 6{,}8\text{m} \approx 7\text{m}$

Real Results (RS)
These results must be interpreted concerning the given problem to get real results. Interpretation means in the context of this problem, that we are talking not about 7kg, but about 7m. Therefore the context of the real problem has to be in the focus, because with getting the real results the transition goes back from mathematics to reality.

Validating means comparing real results with your mental representation and the real model and thus the assumptions you made at the beginning.

The phase of validating is extremely important and has to be guided by the teacher when starting with modelling in class. Learners have to think about the question, if 7m is the right answer on the basis of their assumptions they made before to formulate a mathematical model. Mostly students stop their modelling process with their mathematical results, because this is what they know when solving other mathematical tasks. But mathematical modeling is different. If the mathematical result is not questioned by students with the reality then mathematical modelling makes no sense.

Good modeling problems as a basis for modeling lessons

If you have good modelling tasks, which present a part and so a problem or a situation of reality and mathematics is needed to solve this problem, then you can speak about mathematical modelling. But this is not the whole story, because modelling problems can be very different. So there are some criteria to be mentioned, which make clear, that solving modelling tasks is not the same as well-known problem solving. Within mathematical modelling activities pupils learn to pass through the whole modelling cycle. This is one main criterion for a good modelling task. Thus good modeling problem have special characteristics. Maaß (2007; 2010) developed a multidimensional classification scheme for modeling problems and corresponding activities for the classroom. Furthermore Maaß (2007) pointed out some characteristics, which can be seen as typical for modelling tasks. According to that modelling tasks are:

- open
- complex
- realistic
- authentic
- problems
- solvable through the modelling process

Also about the following criteria (Borromeo Ferri, 2013) you have to think of which can be seen as a complement to the others. These criteria were developed together with many pre-service and in-service teachers who participated in my modeling courses and taught modeling from primary up to high school and so implemented modeling problems in every day teaching:

1. Meaningfulness of the modelling task

There must be a necessity that pupils can handle with this task and that the task makes sense for them to work on it.

2. Age-based reality context

Everyone has his own view on reality and owns experiences and thus it is very heterogeneous also in one class. The everyday life of an eight year old student in primary school is very different from a seventeen year old student of high-school. So considerations can be taken account to choose modelling tasks, which will be interesting for a particular age group.

3. Provocation of further questions

The modelling task should give the possibility for pupils to pose new questions. These questions can be referred to mathematical level and of course on the context and given real situation of the task.

4. Stimulating holistic ways of learning

"Learning with all senses" is also possible with modelling tasks, in particular for those complex modelling problems, which can mainly be solved outside the classroom.

5. Appropriate level of language

The modelling task should be formulated in a way that pupils can understand it regarding to their level of education. Unclear phrases hinder pupils also to build mental representation of the given context in the task.

Mathematical modeling-examples for elementary school

In the current educational standards mathematics in many countries worldwide (e.g. Germany, USA, Chile) mathematical modeling became a crucial part from primary school up to high-school. One modeling problem for secondary school (since grade 9) was presented at the beginning. In the following two examples for primary school with students' solution are shown exemplarily. The first modeling problem is "Big Foot" (Lesh/Doerr 2003), which Lesh called a Model-Eliciting Activity (MEA). According to Lesh, MEA's should start in kindergarten so learners can adopt positions typical of various professions, like engineering or economics, for purposes of understanding how mathematics is needed in real life. The "Big Foot" was taught in many classes in primary school since grade 3 and as well successfully in a school for students with special needs. For learners who never worked before with modeling problems it was really a challenge.

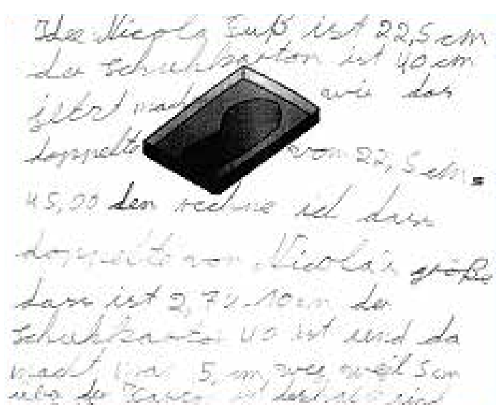
Nevertheless the students worked on this problem very motivated and goal-oriented:

Please help to catch the thief of the jewels and help the police! Look at the footprint and find out the height of the person. Justify your answer!

This modeling problem is not trivial for elementary students, because a lot of competencies are needed:

- knowledge, skills and conceptions about: arithmetic operations, handling with decimal numbers, measurement, proportional thinking
- finding assumptions independently
- validating: Can a person have such a height?
- communicating: reading and presenting the results

Furthermore a lot of substantial mathematical activities become visible like in this solution of students from grade 3:



We measured the Nic's foot and it is 22.5 cm… and on the picture it is 40 cm, and now we double of 22.5 cm and…

Modeling problems are not word problems hence no more information was given and learners had to find strategies to model the problem. The teacher gave students material to measure their feet and their height. Some kids made tables and intuitively they got an idea of proportional thinking, which normally is a topic in grade 6 or 7. Because of the measurement of the feet and the height decimal numbers were discussed, although it is again not a topic in grade 3. Thus several groups of students easily made additions or even multiplications and other groups decided to work mainly with whole numbers.

The four groups finally got the following results, which were written on the blackboard:

- 1.72 m
- 1.65 m
- 2.80 m
- 1.87 m

As already mentioned validating the results is important and younger students should learn this from the beginning on. The reflection of these results was interesting, because some students did not recognized that the height of 2.80 m is not realistic. One grade 3 student explicitly said: “Oh no! 2.80 m cannot be right, because there is no human, which has that height!”

Therefore the teacher has to encourage the validation process and later on the students do it on their own. For the learners this modeling problem was a good experience, which became visible through the following statements:

Esra (9 years) guessed: “There was a lot of mathematics in this task! We had to think about many things before we began to calculate.”

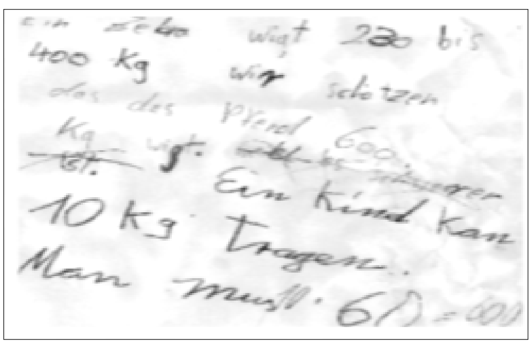
Arturo (8 years) liked the context of the modeling problem: “We did something, what the police is doing. That was not like: “Do subtraction or division”. We had to search for the mathematics – that was great.”

The next modeling problem is named “Pippi Longstocking” and was taught in grade 3 and 4. Based on the famous story written by Astrid Lindgren about the strongest girl in the world, Pippi Longstocking, who is able to lift her horse, the question of the problem is, “how many students of your class are needed to do like Pippi?”

Pippi Longstocking is able to lift up her horse. How many students of your class are needed to do it like Pippi?

Similar to the previous modeling problem a lot of competencies are needed to get an adequate solution. Beneath knowledge, skills and conceptions about arithmetic operations, handling with decimal numbers the weight is in the focus. Learners have to find out the weight of a horse and then how many kilograms they are able to lift up. For this the teacher should provide a scale in order that students can lift for example their school bag full of books and then weight how much they can lift up by stretching their arms like Pippi. The information of horse weight students can find in book about animals, which is in average 500 kg. The teacher can of course give them the information, but mathematical modeling also means to search for this kind of information hence students learn to work more self-independent. If students finally found out the weight of the horse and how many kilos they can lift up, they bring it in the relation of the number of students in the class.

The following modeling process was done by a group of grade 4 students:



A zebra‘s weight is about 230 to 400 kg. And a horse then about 600 kg. Every one of us can lift up about 10 kg.
So, we need 10 of our class to lift up the horse.

During the process of searching the information about the weight of the horse there was no book available in the classroom with this special information. Nevertheless the students found a book about wild animals and about zebras. Because zebras have similarities to horses they extrapolated the weight and made a right assumption. After the weighting process in their group they came to the result that in average they can lift up 10 kg. Instead of division they multiplied 10 x 60 and got 600 as a result. The real result was 10, because students argued that 10 people of the class are able to lift up the horse. The other groups in the class got similar results, but no student reflected about the fact *how* and *if* 10 or more children from the class really can lift up a horse. The transition from mathematics to reality is not easy concerning this problem. Only in the following validation phase in the plenum this aspect was initiated by the teacher and then reflected and discussed with the whole class. This modeling problem is different than the Big Foot problem, because the validation of the real results depends on several facts, which are not in the mind of the pupils. Thus this problem strongly provokes further questions like it is claimed in the criteria of good modeling problems.

Teaching competencies for mathematical modeling

The necessity to develop programs for pre- and in-service teacher education for the learning and teaching of mathematical modelling is strongly recommended and still needed. Best practice examples of modelling courses which however have different foci (for an overview see Cai et al. 2014) always show that teachers need time to understand the complexity of mathematical modelling for themselves. The concept of a modelling course which offers a balance between theory and practice can be very successful regarding to the knowledge needed for teaching modelling (Borromeo Ferri & Blum, 2009). There are no well-defined competency criteria which teachers should have to teach modelling in school. Borromeo Ferri & Blum (2009) created a model of required teacher competencies based on the long-term experiences of the author by developing and conducting a course for teaching and learning of mathematical modeling. This course is evaluated and modified in the last six years in response to the variegated needs of the university or of the in-service teachers while teacher training. These courses were taught beneath in Germany and in the United States in several countries of the world. In particular when the author started with the course conception the question was how future teachers can be prepared in university courses for teaching modeling in school and which contents and which methods are appropriate?

The model of teaching competencies includes of four dimensions which are needed to teach mathematical modeling successfully in school for all grades:

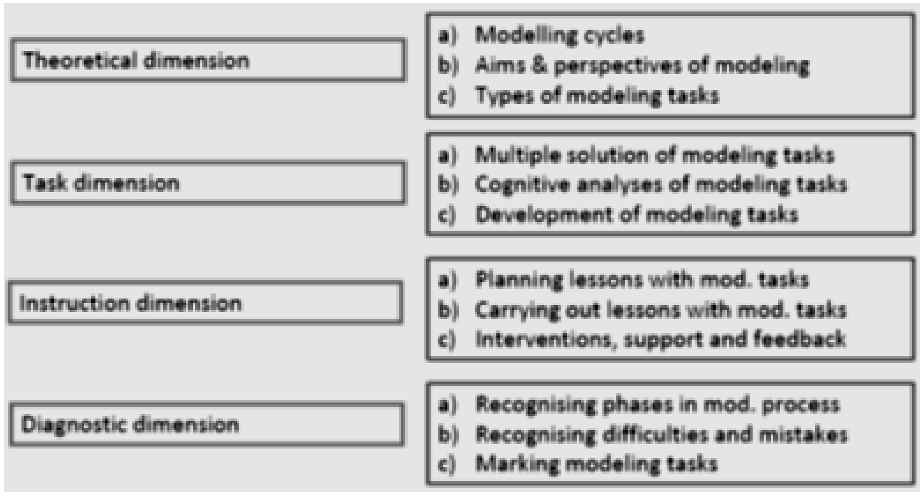


Fig. 2: Model for teaching competencies for mathematical modeling
Fuente: Borromeo Ferri & Blum, 2009.

The first dimension, the theoretical dimension clarifies what mathematical modeling means as a standard, in research and how it is interpreted in other countries to get a broader view. This is summed up under b) aims and perspectives. Mathematical modeling is a complex process, but can be represented through different modeling cycles showing the transition processes between reality and mathematics (see a). Solving a modeling problem is of great importance. This means that pre- and in-service teachers have to work on a modeling problem, in particular at the beginning of the course and later on as well (see c). This theoretical part is a crucial background and is needed as basis for the practical work.

The goal of the task dimension is to work and discuss with teachers criteria of modeling tasks. Questions like “What is a good modeling task?” or “What is difference between a problem and a modeling problem?” are picked up. Furthermore cognitive analysis of modeling tasks, which means concretely to classify the solution steps to the different phases of the modeling process, is stressed. Another important aspect is the development of a modeling task within a group. Closely related to the question what describes a good or a bad modeling problem is to think about qualitative instruction. Within the instruction dimension aspects of modeling lesson planning and executing are in the foreground. Finally the diagnostic dimension comprises that teachers are able to recognized difficulties and mistakes in different phases of the modelling process and so to have the knowledge to develop tests and to grade them. Therefore they need background about how to make diagnosis and which types of teacher interventions are effective or not for modeling.

Summary and discussion

Mathematical Modeling is a challenge for teachers and students worldwide, but it offers great opportunities on several levels. From empirical studies we know that mathematical modeling can be taught and learnt (Blum, 2011; Borromeo Ferri, 2009). Knowledge about mathematics is the basis for applying mathematics and so for mathematical modeling. If students see the importance that mathematics is useful for real life, they are open-minded for mathematical modeling and motivated. They are then able to realize that mathematics is needed for a lot of professions.

Overall mathematical modeling as an important part of all education standards mathematics and curricula in many countries and helps to prepare our students to be successful in their careers starting at college, university or at any kind of profession they want to learn.

References

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling,* Dordrecht: Springer, 15-30.

Borromeo, Ferri, R. (2007). Modelling from a cognitive perspective. In: Haines et al. (Hrsg.) *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*, (ICTMA 12) Chichester: Horwood Publishing, 260-270.

Borromeo, Ferri, R. & Blum, W. (2009). Mathematical Modelling in Teacher Education—Experiences from a Modelling Seminar. In Durand-Guerrier, V.; Soury-Lavergne, S. & Arzarello, F. (Eds.) *European Society for Research in Mathematics Education—Proceedings of CERME 6*, 2046-2055.

Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematical Modeling in European Education. In *Journal for Mathematics Education at Teachers College, 4*, S. 18-24.

Cai, J.; Cirillo, M.; Pelesko, J.; Borromeo Ferri, R.; Borba, M.; Geiger, V.; Stillman, G.; English, L.; Wake, G.; Kaiser, G. and Kwon, OhNam (2014). Mathematical Modelling in School Education: Mathematical, Cognitive, Curricular, Instructional, and Teacher Education Perspectives. In Liljedahl, P., Nicol, C.; Oesterle, Sl; Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (1). Vancouver, Canada: PME, 145-172.

Lesh, R. & Doerr, H. (Eds.) (2003). *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Maaß, Katja (2007). *Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe I,* Cornelsen: Skriptor.

_____ (2010). *Classification scheme for modelling tasks. Journal für Mathematik Didaktik, Jg*, *31* (2), 285-311.

Computer supported Mathematics learning: technology as a partner in learning Mathematics

Dragana Martinovic[5]

In this paper, we will use misconceptions that students have about an altitude concept and will use examples created in GeoGebra, a dynamic interactive mathematics learning environment (DIMLE), to address the following questions:

- How can student develop deeper understanding of mathematics concepts within a dynamic interactive learning environment?
- How to design and conduct mathematics learning activities?
- What should educators observe when students do mathematics using digital technology?

Introduction

Simulations and graphical presentations are important tools for successful presentation of mathematics concepts, but may require advanced software and skilled users to take the full advantage of these conveniences. With new technologies, mathematics education is moving toward more descriptive ways of teaching with more emphasis on graphs, charts, models, diagrams, multimedia, and virtual reality, which can enhance students' understanding. Dynamic changes in diagrams and formulas, and opportunity to see how visual, tabular, and symbolic representations connect and interact, present mathematics in interesting ways suitable for achieving educational

[5] University of Windsor, Ontario, Canada.

goals at different levels of schooling. Using GeoGebra,[6] as an example of dynamic interactive mathematics learning environment (DIMLE), allows teachers and students to investigate dependencies between variables, and to better understand what will change and what will remain the same, under the specific conditions.

Dealing with Students' Misconceptions

Two of the frequent students' misconceptions relate to their lack of understanding the concept of altitude and diagonals of polygons (Hershkowitz, 1987). Cunningham and Roberts (2010) found that textbooks may use incomplete examples or inadequate definitions, which may be the cause of students' misunderstandings. As a suitable definition of altitude of a triangle, they considered the statement that acknowledges the cases when the altitude becomes "invisible" (it coincides with a side of the triangle) and when it is necessary to extend the base of the triangle to construct an altitude from the opposite vertex. In other words, students should realize that sometimes the side could serve as an altitude (as it is in the right triangle) and that an altitude could be constructed outside the triangle (as it is in the obtuse-angle triangle, see Figure 1).

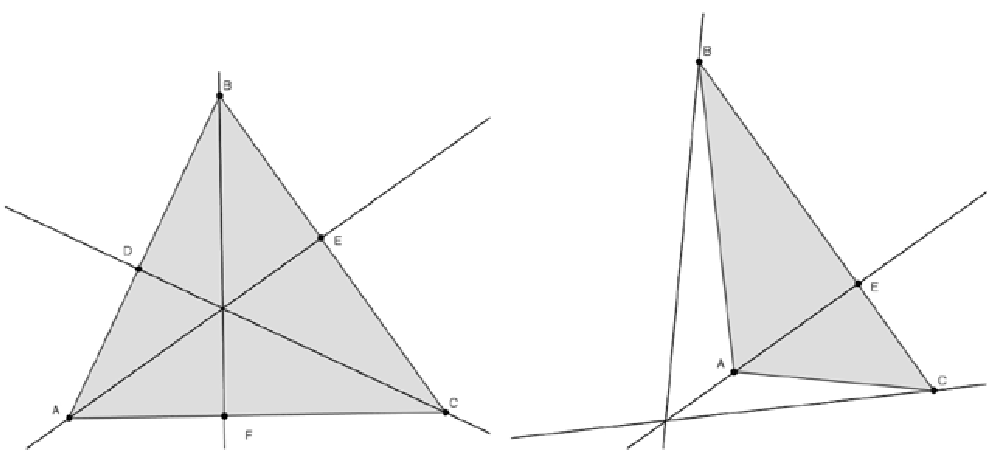


Figure 1. On the left are altitudes in a scalene triangle; on the right are altitudes in an obtuse angle triangle.

[6] To learn more about GeoGebra, contact to Instituto de Geogebra en la UNAM.

In GeoGebra,[7] this misunderstanding could be resolved using the benefits of dragging; since the original scalene triangle has all angles acute, orthogonal lines constructed from each vertex to its opposite side carry the altitudes AE, BF and CD (each of the points D, E, and F is constructed as an intersection of the two lines, or more precisely, of a side of the triangle and an orthogonal line). After dragging any of the vertices, the student can easily understand the concept of a triangle, independently of its position on the computer screen or its shape. For example, by changing the shape, the triangle can become a right-angle, obtuse-angle, equilateral, or isosceles; it can even degenerate into a line (see Figure 2).

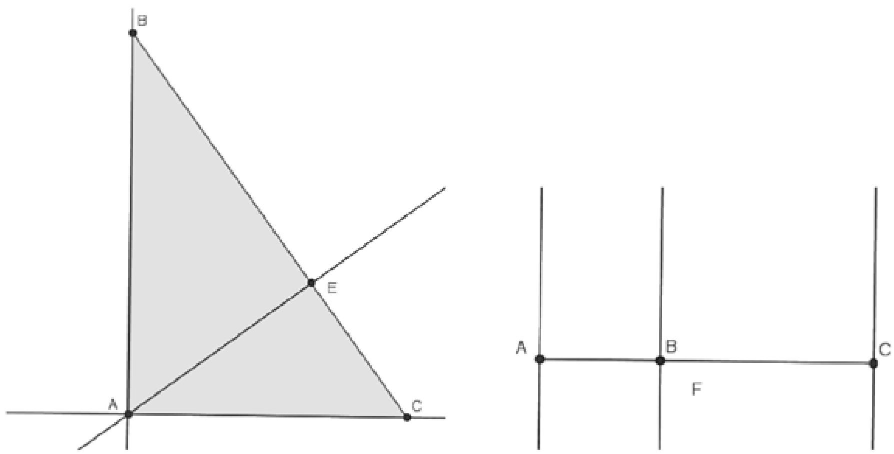


Figure 2. On the left is the right-angle triangle; on the right is a triangle with three collinear vertices.

Although dragging helps with developing a concept of triangle, presentations in Figures 1-2 are still confusing in identifying altitudes of the triangle. Using the GeoGebra option to create altitudes as segments does not help, as they disappear in all cases except when all angles in the triangle are acute (see Figure 3). So, the same triangle with visible three altitudes may transform through dragging into a triangle with only one visible altitude AE. In such a case, the student may miss the point that segments AB and AC are the other two altitudes (coinciding with two sides of the triangle).

[7] These examples were created in GeoGebra 5.0.

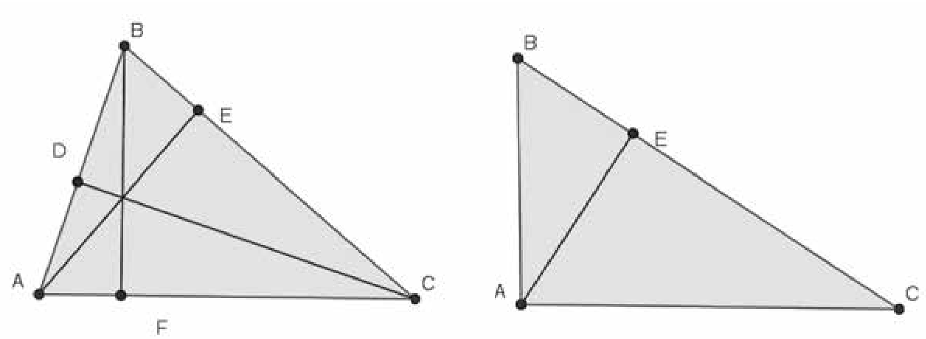


Figure 3. The acute-angle triangle on the left may become a right-angle triangle through dragging.

The situation is also confusing in the cases when a triangle transforms into an obtuse-angle triangle or degenerates into a segment (see Figure 4). Altitudes that are presented as segments simply disappear in such cases.

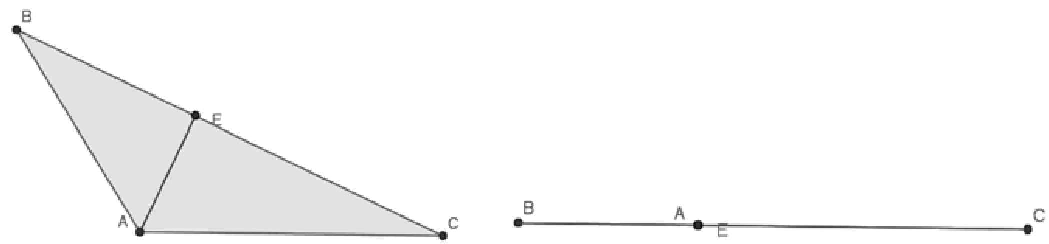


Figure 4. On the left is an obtuse-angle triangle; on the right is a triangle with three collinear vertices.

In the case of an obtuse-angle triangle, the altitudes (except one) are not visible, and in the case when the triangle degenerates into a segment (as presented on the right in Figure 4), none of the altitudes are visible. There is one inclination that the altitude AE still exists, but that it is 0, since the points A and E coincide. But, what happened with BF and CD from Figure 3? Using the algebra view in GeoGebra, does not help either, since it provides lengths only of the visible lines, treating even the two altitudes AB and AC in the right-angle triangle as "undefined."

The teacher is left with the next option, which is to show not only the segments, but also to keep the lines that contain them visible. The lines that contain altitudes could be dotted, to emphasize the difference from the style used to present the lines which contain the sides (see Figure 5).

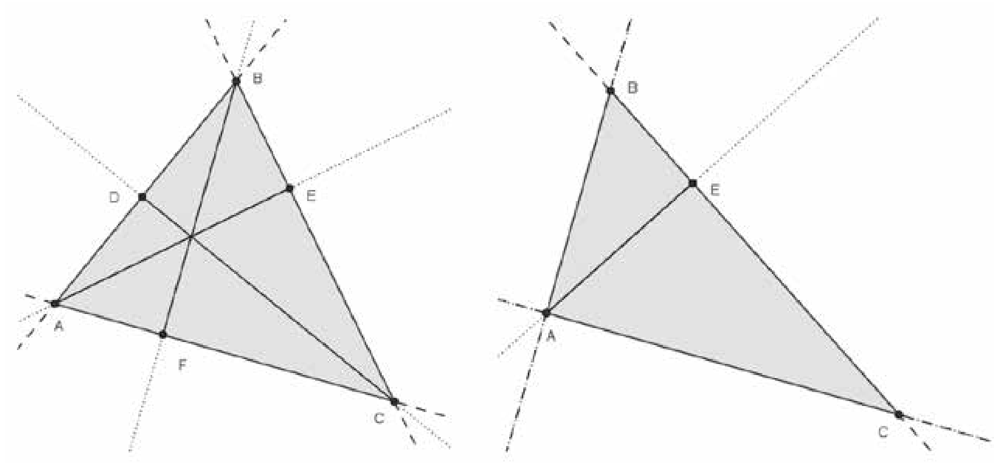


Figure 5. The constructions show the dotted lines that contain segments.
Different line styles are used for the lines that contain the sides,
from those lines that contain the altitudes.

The triangle on the right side of Figure 5 was obtained through dragging the vertex A, to obtain a right triangle. Compared to Figures 2 and 3, although through this process the altitudes also did disappear, the student (and a teacher) could notice that the dotted lines AB and AC now incorporate both patterns that were used for the lines containing sides and the attitudes of the triangle on the left of Figure 5. So, in a way, these differently dotted lines are saying: “We contain both a side and an altitude of the triangle.”

Further dragging of the vertex will produce an obtuse-angle triangle (see Figure 6). With the addition of the angles between lines (note the 90^{o} angles in the construction), it becomes clear that some lines are perpendicular to each other and that an obtuse-angle triangle has two altitudes that are outside of the triangle. Further dragging will emphasize the critical aspects of an altitude in the triangle: “It is the shortest distance from a vertex to the line containing its opposite side. There are three altitudes in a triangle. It is a segment from a vertex, which is perpendicular to the line containing the opposite side.”

This exploration accompanied with a definition, alleviates the misconception that the altitude always needs to be inside the figure and that some triangles may have only one altitude (which may consequently lead to conclusion that it may have only one base, and so on). Also, making all these approaches obvious to students, allow teachers to carry our rich discussions around definitions, conditions, and proofs. For example, how do they explain the situation on the right of Figure 6, if we conjecture that extended altitudes of any triangle intersect in the orthocenter?

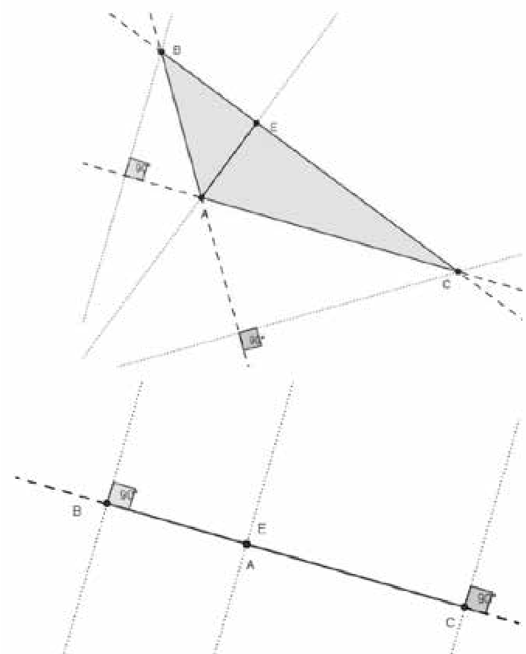


Figure 6. An obtuse angle with clear separation between dotted lines that contain sides and the lines that contain altitudes.

Introducing big ideas in mathematics

According to Marian Small (2009) the children can very early develop understanding that:

- Mathematical objects and relationships can be presented in different ways; each making something about these objects more obvious. In the case of the triangle altitudes, we noted that work with and without technology could be coordinated, and each way could be discussed with students to instill in them to think about how different approaches may lead to interesting and different observations;
- Comparing mathematical objects and relationships helps us to see the similarities and differences. Making observations of different options that software, such as GeoGebra offers, can help us to better understand limitations of certain representations, which may

reinforce the concepts. Building the concept from examples and non-examples is a powerful learning method;

- We make inferences based on limited information. Each different representation helps us know more. Extensions of the problem make the learners think! Teachers can ask the following questions: “So far we worked with altitudes of a triangle; do all polygons have altitudes? If they do, what would be their properties? What would be their significance?”

Theoretical Observations[8]

The learning environment of software like GeoGebra relies on the user-controlled choices of options available in the software. The examples that we elaborated on in this text show that some balance between discovery and guidance is necessary (Tolhurst, 1992), so that the needs of inexperienced learners are met as well. On one side, the teacher needs to guide the students so that they do not “mindlessly” go through the options taking for granted what they “see”. On the other side, the teacher has to keep students “at the edge,” asking them to stop and reflect, to re-direct their thinking, and to analyze consequences of their choices in the software for the task at hand (Reiser, 2004).

The problems that students may have with understanding relatively simple concepts of altitude and diagonal, that Cunningham and Roberts (2010) pointed to, demonstrate that learning mathematics requires that students bridge the gap between ordinary language and the **language of mathematics**. Mathematics concepts can be presented verbally (with different levels of sophistication), visually (through graphs, charts, diagrams, animations), and symbolically (using abbreviations, formulas, and expressions). Furthermore, mathematics can be rooted in real life problems, or introduced as a theoretical reasoning system. In “Diagnosing Mathematical Difficulties,” Underhill, Uprichard, and Heddens (1980, p. 6) wrote: “When a body of knowledge is new, a necessary prerequisite for enhanced communication and growth is clear terminology.” The clarity in written

[8] Some of these observations were previously published in Martinovic, D. (2004). Communicating mathematics online: The case of online help. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Toronto, Toronto, ON.

and spoken teacher-student mathematics communication is essential because many misconceptions on the student's side can be prevented by the use of proper and consistent style (Bagchi & Wells, 1998). Using a so called, "telegraphic style" (which is a pure symbolic form like in: ($\forall x \in N$), *x is even* $\Leftrightarrow x \equiv 0$ [mod 2]), places an additional burden on students. Other researchers also found evidence that students need to be able to pass several hurdles in communicating mathematics. They need to: (a) understand what the question is about and relate it to learned mathematics, (b) symbolize what was expressed verbally, and to (c) apply a correct series of steps that logically follow one after another. Moving from text-based to symbolic mathematics notation is difficult even for students who can solve a problem in their head (without using appropriate mathematics notation), and who also have enough skill for symbolic manipulation (Heffernan & Koedinger, 1997; Koedinger & Anderson, 1998).

Actually, symbolic manipulations in mathematics can also have a reassuring effect on students. If their mathematical experience is based on mindless computations, students may find comfort in repeating activities that are familiar to them during which they feel more confident. This only reinforces the importance of thinking mathematically (Small, 2009)—which is (a) that comparing helps us to see similarities and differences; (b) that if we deal with limited information, different representations will help us to know more, and (c) that both an informal process of making sense and a formal process of proving help us to become certain.

The problem with mathematics is that it is not commonly viewed as a discursive subject (Pimm, 1987, p. 47). This means that students generally believe that mathematics is learned by being told. Furthermore, students often see mathematics class discussions as disruptions. Especially those who do not feel confident with mathematics look for simple, clear instructions that they can apply and get the work done. Nemirovsky and Monk (2000) too found that "path-following" is the common practice in school mathematics, either in the form of adhering to a teacher's or the textbook's detailed instructions. They emphasized that path-following may be advantageous for students in new situations, or when one needs to be efficient; while the more adventurous approach of "trail-making" is risky, and time consuming, but promotes understanding. Students who were mostly exposed to following rules in mathematics are less likely to view it as a subject where discussion and debate are common.

In their study of first year university students, Crawford, Gordon, Nicholas, and Proser (1993) revealed that more than 80% of the sample viewed mathematics as a set of rote learned rules. The students approached mathematics learning in a fragmented fashion with the intent to reproduce standard techniques for examination. Crawford et al. advised teachers to carefully sequence the new material in such a way that it can be assimilated to a conceptual structure, rather than just copied by the students. Also, as Skemp (1987) advised, instead of jumping right into the "telegraphic style," the teachers should use transitional, more informal notations.

Students often believe that there is only one "right way" to solve a problem. The anxiety they feel affects their understanding of mathematics. Their motivation for a given task decreases with the complexity of the task. Skemp (1987) reported that even adult learners, who study independently from a text, still feel the effects of their early teachers on the level of self-confidence in their mathematical learning.

What is the value of learning mathematics from examples? The notion that learning from worked-out examples may be effective (Renkl, 2002) is well known, and is still a basis for writing mathematics textbooks and practice sheets. Such examples consist of a carefully framed question, a list of solution steps, and the result. Since mathematics is usually considered as a "well-structured domain" (Renkl, 2002, p. 529), many share the opinion that the initial skill acquisition can be most efficiently obtained through the worked-out examples, either as a form of self-learning or the teacher modelling the solution steps.

However, constructivists claim that learning is not achieved from direct instruction, or from drill and practice (Anderson, Reder, & Simon, 1997, "Claim 1"). Direct instruction leads to routine but further away from understanding. In other words, students tend to mimic the teacher's behavior or the textbook example, rather than choosing to understand their meaning (Brousseau, 1984). According to constructivists, students learn while actively resolving problems in the mathematical practices of the classroom. Teacher and students try to make sense of mathematics through the process of negotiations of meaning where the basis of their communication is "taken-as-shared" mathematical reality (Cobb, Yackel & Wood, 1992, p. 16).

The researchers in Information-processing psychology (whose theory is named cognitivism) believe that the "drill and practice" type of learning is useful and not preemptive for motivation and personal growth. The proponents of this theory believe that any learning task can be split into components-related processes that interact with each other, with the current environment, and other components of the knowledge. In order to develop a full picture of these interactions among components of knowledge, they compare cognition to computer programs. Large tasks consist of subtasks that can be learned independently in their particular contexts, which is necessary in order to meet the limits of human attention and short-term memory. Aware that such knowledge can be context bound, they propose task-oriented teachable procedures that balance the advantages of generality with the advantages of incorporating enough situational context to enable transfer of learning (Anderson et al., 1997, “Claim 1”).

Both laboratory and case studies indicated that real competence only comes with extensive practice (Ericcson, Krampe & Tesche-Römer, 1993; Hayes, 1985). Giving up drill and practice might restrict students in using the best method in achieving real competence. Learning from examples and learning by doing speed up the learning process and encourage the learner to achieve deeper levels of understanding. Such methods were effectively applied in studies with computer tutors, as well as with pencil and paper (Anderson et al., 1997, “Recommendations for Research”).

Information-processing psychology, or cognitivism, views learning from examples (rather than natural language explanations of a procedure) as a driving force in acquisition of skill. During this experience students need to generalize from particular instances of the procedure and integrate what they have learned into their existing knowledge. Each instance demonstrates only a relevant part of the procedure so, in order to obtain a complete picture, a learner must integrate parts of the procedure that have been extracted from several examples (VanLehn, 1990, p. 8).

Learning through iterative redescription. Karmiloff-Smith (1992) explained the process of reaching expertise by going through the iterative process of representational variations. She named this learning process, Representational Redescription.

At the beginning of their learning, children develop “behavioral mastery.” Initially, their internal representation is incomplete and may contain errors, but it will be refined through “unpacking” the structures that underlie the competence in order to make them more explicit. In each phase of the learning process, old errors are replaced by new as a result of the incompleteness of their internal representation. Therefore, different interpretations of some phenomena help students to re-describe their knowledge in a new representational form. Eventually, this leads to acquiring deeper understanding.

Driven by what they feel as incomplete internal presentation, students ask for new interpretation from an independent source. The variability in views, examples, and approaches to solving similar problems, helps them to bring together their external and internal representations and develop a real competence in the subject. This supports being innovative and courageous in the ways one answers students' questions, especially when they start with: "I do not get it!" When the question shows that the student is exposed to the theory/solution that he or she does not understand, it is not necessary to try to follow the theory/solution. Giving another interpretation gives a different view to the problem and sheds more light on the solution. In other words, instruction does not have to be exactly the same as the type a student received in a class, to be effective and helpful to the student.

Self-learning. In her 1998 article, Chi acknowledged the difference between performance and understanding and argued that the acquisition of new knowledge requires active involvement from students. She found direct instruction (teacher's explanations, textbook examples) insufficient for the perfect assimilation of the new knowledge.

Chi hypothesized that there must exist the domain-independent activities for learning. One such activity is self-explaining or generating explanations to oneself, usually in the context of learning from an expository text. Self-explaining is different from explaining to others because it is more focused, self-directed, and serves the goal of revising the information rather than passing it on to others. Self-explaining is different from thinking aloud since the later makes overt anything that goes on in somebody's mind, without the goal to understand. The closest learning strategies to self-explaining are reflection and elaboration; the difference being that the agent of elaboration can be outside the learner, while self-explaining is strictly an internal activity. Also, case studies showed that about one-third of self-explanations are to some extent based on common knowledge.

Chi's compelling conclusion was that self-explaining does not serve for inferring missing information but for the repair of student's mental models (Chi, 1998, "Skepticisms About the Inference-Generating View"). This she inferred from the research that shows that students always learn better through self-explanations, but do not always learn better from more elaborated text.

Constructivists like Webb (1989), find explanations generated by the student more effective for learning than didactic instruction, and Chi reasoned that the cause is in the fact that teachers cannot accurately diagnose student's understanding and therefore cannot tailor their teaching to accurately address the individual student's needs. Both Karmiloff-Smith and Chi stressed that it is up to the learners to detect a conflict in their own knowledge and perform the appropriate action, either through unpacking appropriate knowledge structures —as Karmiloff-Smith argued, or self-explaining— as Chi suggested.

Although the researchers do not always agree, especially when asked to present "methods for good learning," it seems that the real learning benefits occur when the students go through the phases of self-diagnostics and self-explanations, while taking an active role in their learning. In the examples that were provided in the first part of this paper, we problematized the notion that the teachers should assume that even the some well used mathematics concepts are well known to their students. By developing a healthy attitude among the students and in the classroom: to question, to debate, and to challenge the ideas (those of their own and of others), students will develop lasting capacity to learn mathematics. Since technology may easily become the main focus of student interest, it is important that teachers use it in the context of mathematics, so that mathematics is at the forefront. Technology should decrease, rather than add to a cognitive load! It should help with alleviating misconceptions and digging deeper into mathematics. It should engage all students, and make learning more interesting and powerful, and become a partner in learning mathematics.

References

Anderson, J.R., Reder, L.M., & Simon, H.A. (1997). *Applications and misapplications of cognitive psychology to mathematics education*. Retrieved from http://act.psy.cmu.edu/personal/ja/misapplied.html

Bagchi, A., & Wells, C. (1998). On the communication of mathematics reasoning. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *8*(2), 15-27.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In H.G. Steiner (Ed.), *Theory of mathematics education, Occasional paper 54* (pp. 110-119). Bielefeld, Germany: University of Bielefeld, Institut für Didaktik de Mathematik.

Chi, M. T.H. (1998). Self-explaining: The dual processes of generating inferences and repairing mental models. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (pp. 161-237). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*, 2-33.

Crawford, K.P., Gordon, S., Nicholas, J., & Proser, M. (1993). Learning mathematics at university level. In W. Atweh (Ed.), *Contexts in mathematics. The Proceedings of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 209-214). Annual conference. Brisbane, July 1993.

Cunningham, R.F., & Roberts, A. (2010). Reducing the mismatch of geometry concept definitions and concept images held by pre-service teachers. *IUMPST: The Journal*, *1*(Content Knowledge), Retrieved from www.k-12prep.math.ttu.edu

Ericcson, K.A., Krampe, R.T., & Tesche-Römer, C. (1993). The role of deliberate practice in the acquisition of expert performance. *Psychological Review*, *100,* 363-406.

Hayes, J.R. (1985). Three problems in teaching general skills. In S. F. Chipman, J.W. Segal & R. Glaser (Eds.), *Thinking and Learning Skills: Research and Open Questions*, Vol. 2, (pp. 391-406). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Heffernan, N.T., & Koedinger, K.R. (1997). The composition effect in symbolizing: The role of symbol production vs. text comprehension. In M. G. Shafto & P. Langley (Eds.), *Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 307-312). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry or when "a little learning is a dangerous thing." In J. Novak (Ed.), *Proceedings of the 2nd International Seminar on*

Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics Vol. III, (pp. 238-251). Ithaca, NY: Cornell University.

Karmiloff-Smith, A. (1992). *Beyond modularity: A developmental perspective on cognitive science*. Cambridge, MA: MIT Press/Bradford Books.

Koedinger, K.R., & Anderson, J. R. (1998). Illustrating principled design: The early evolution of a cognitive tutor for algebra symbolization. *Interactive Learning Environments*, *5*, 161-180.

Martinovic, D. (2004). *Communicating mathematics online: The case of online help.* Unpublished Doctoral Dissertation, University of Toronto, Toronto, On.

Nemirovsky, R., & Monk, S. (2000). "If you look at it the other way…" An Exploration Into the Nature of Symbolizing. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.) *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 177-221). Lawrence Erlbaum.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. London: Routledge & Kegan Paul, Ltd.

Reiser, B.J. (2004). Scaffolding complex learning: The mechanisms of structuring and problematizing student work. *Journal of the Learning Sciences*, *13*, 273-304.

Skemp, R. (1987). The psychology of learning mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Small, M. (2009). *Big Ideas from Dr. Small Grade 4-8 Creating a Comfort Zone for Teaching Mathematics*. Nelson School Central, Nelson Education Ltd.

Tolhurst, D. (1992). A checklist for evaluating context-based hypertext computer software. *Educational Technology*, *32*(3), 17-21.

Underhill, R., Uprichard, A., & Heddens, J. (1980). *Diagnosing mathematical difficulties. Columbus*, OH: Charles E. Merrill Publishing Co.

VanLehn, K. (1990). *Mind Bugs: The origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Massachusetts, London, England: The MIT Press, A Bradford Book.

Webb, N.M. (1989). Peer interaction and learning in small groups. In Webb, N. (Ed.), *Peer Interaction, Problem-Solving, and Cognition: Multidisciplinary Perspectives* [Special Issue] *International Journal of Education Research, 13*, 21-39.

Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa: una introducción breve

Ricardo Cantoral Uriza[9]

Este documento se apoya en una serie de publicaciones recientes sobre esta temática, no se trata de un estudio exhaustivo del tema, sino sólo aspira a ser una introducción breve al mismo. La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) plantea que para estudiar fenómenos didácticos ligados a las matemáticas escolares es necesario acudir, y esto nos diferencia de otros enfoques teóricos, a un examen minucioso del *saber*: a lo que denominamos su *problematización*. Proponemos aunar nuestra mirada a los estudios que se realizan sobre las relaciones entre profesores, alumnos y conocimiento escolar, incorporando las múltiples dimensiones del saber que hasta el momento se habían desatendido. Asimismo, respecto al estudio realizado sobre las restricciones institucionales de tipo pedagógico general, nosotros ampliamos el estudio hacia aquellas otras restricciones ligadas específicamente al saber matemático, pues creemos que solo así comenzaremos a tejer puentes entre la investigación y la realidad del aula.

La TSME se ocupa del problema que plantea la constitución del saber matemático entre la población, sus constructos son elaboraciones con una fuerte base empírica. Bajo este enfoque, se asume la legitimidad de toda forma de saber, sea popular, técnico o culto, pues todas estas formas en su conjunto constituyen la sabiduría humana. Otros acercamientos teóricos contemporáneos, en cambio, examinan sólo alguna forma de saber. En general, los estudios sobre el entendimiento en Matemáticas han sido la base

[9] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), México.

para constituir al programa socioepistemológico, programa que se ocupa del análisis de los mecanismos de tránsito del conocimiento al saber. El paso del conocimiento al saber que experimenta un sujeto, sea este individual, social o histórico, debe satisfacer necesidades de carácter esencial que la investigación ayuda a precisar. En este proceso de tránsito y para el caso de la matemática escolar, se busca que la acción educativa transforme benéficamente a la realidad estudiada, constituyendo así una educación para la libertad.

La expresión *socioepistemología* plantea en sí misma, una relación al saber, una analogía de naturaleza social que ubica al saber —en tanto construcción social del conocimiento—. Ahora bien, dado que el saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción al sistema didáctico le obliga a una serie de modificaciones sobre su estructura y su funcionamiento; lo cual afecta también a las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesor. Al introducir como objeto didáctico el saber matemático al aula, se producen discursos que faciliten la comunicación de conceptos y procedimientos matemáticos y, en consecuencia, el saber se despersonaliza y descontextualiza reduciéndose a temas secuenciados, con el fin de favorecer la formación de consensos. Dichos consensos se alcanzan a costa de una pérdida del sentido y del significado original, reduciendo el saber a temas aislados y secuenciados, a menudo denominados conocimientos: "contenidos" o "unidades temáticas" de una asignatura. Los discursos que validan la introducción del saber matemático al sistema didáctico, y que legitiman un nuevo sistema de razón, reciben el nombre genérico, en esta teoría, de *discurso Matemático Escolar* y son vistos como medio para lograr una participación consensuada en el ámbito didáctico.

Bajo este programa los conceptos y procesos matemáticos que se ponen en funcionamiento en un acto didáctico pueden no ser objetos matemáticos en el sentido clásico, formas de saber culto aceptados por la comunidad matemática o por la noosfera educativa expresados en el currículo oficial, ya sea explícita o tácticamente. Pues serán nociones, preconceptos o ideas en su etapa germinal, acciones, actividades y prácticas que participan de otros ámbitos de la actividad humana como la construcción de artefactos, las innovaciones tecnológicas, diseños de ingeniería, del ámbito de las ciencias, las técnicas, las artesanías, las actividades comerciales y así un largo etcétera. Esto es así porque las Matemáticas son consideradas, desde la mirada socioepistemológica, parte esencial de la cultura, un elemento “vivo” que se crea “fuera” del aula, pero se recrea “dentro” de ella: las Matemáticas no se inventaron para ser enseñadas y sin embargo se enseñan, se las usa en distintos escenarios, digamos que “viven” a través de las acciones más básicas de toda actividad humana: construcción de vivienda, actividades de siembra y tejido, elaboración de protocolos para el empleo de fármacos o de tóxicos, elaboración de recetas de cocina, diseño de depósitos de vino, cálculo de dosis médicas, explicitación de conjeturas matemáticas, coordinación de movimientos de un piloto al aterrizar en una pista complicada, matematización de fenómenos biológicos, toma de decisiones para inversiones financieras, interpretaciones de la opinión pública, simulación de flujos continuos, trueque en mercados tradicionales, estudio de la consolidación de suelos finos saturados, mecanismos regulatorios de temperatura en la industria química... Están presentes también en la educación formal, en las aulas de Ciencias, Física, Química, Biología, Tecnología, Taller, Lectura y comprensión… y, por supuesto, en la clase de Matemáticas. Están presentes en las prácticas cotidianas de todos los seres humanos cuando clasifican, predicen, narran, comparan, transforman, estiman, ajustan, distribuyen, representan, construyen, interpretan, justifican, localizan, diseñan, juegan, explican, cuentan o miden.

Pensamiento y Lenguaje variacional (PyLV)

Se trata de una línea de investigación que históricamente fue la base del programa socioepistemológico PyLV. Veamos cómo es que se construye la noción de derivada a partir de problemáticas ligadas al cambio y la variación de orden superior. Teóricamente anticipé que en la enseñanza del Cálculo se produciría un singular fenómeno ligado al aprendizaje, tanto al nivel de los estudiantes como al de los profesores. En términos técnicos, diríamos que el *discurso matemático escolar*, en tanto sistema de razón, estructura a los actores educativos a través de una *costumbre didáctica*, produciendo un escaso entendimiento conceptual para la *transferencia de significados*. Sintéticamente, produce una ausencia de *noesis* (como aprensión conceptual del objeto), derivada de una falta de *praxis* (como proceso de conocimiento y toma de conciencia) de lo que afirmamos el *enunciado socioepistemológico*, la noesis representa a la *experiencia vivida* en conjunto, mediante actos de comprensión enfocados sobre el objeto de la experiencia, como la percepción, la imaginación, la conciencia o el recuerdo. Así, que el enunciado socioepistemológico en versión corta diría: *no hay noesis sin praxis*.

Encontré en esos años, teóricamente, que sin el desarrollo del *pensamiento y lenguaje variacional* (praxis), sería imposible que un estudiante abordase exitosamente un conjunto de tareas como las que veremos a continuación. Que un estudiante o un profesor, tendría dificultades en asignar los significados asociados al tipo de relaciones f y f'' o f y f''' (noesis), pues el *discurso Matemático Escolar* induce un énfasis mayor en las derivadas consecutivas, o relaciones del tipo $f^{(n)} \longleftrightarrow f^{(n+1)}$. Pero casi nunca centrarían la mirada en aquellas otras del tipo $f^{(n)} \longleftrightarrow f^{(n+2)}$ o menos aun en $f^{(n)} \longleftrightarrow f^{(n+3)}$.

La razón de este hecho está ligada a la forma en que se introduce al aula el tema de derivada de una función real. La presentación escolar utiliza al límite del cociente incremental, y en caso de existir, le denomina *derivada* de f en a, y le denota por $f'(a)$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La *segunda derivada* de la función f, se define como la *derivada* de la función derivada, la tercera derivada se define como la derivada de la función derivada segunda, y así sucesivamente. De este modo, el concepto a definir, dado este encadenamiento de derivadas, es propiamente el de *primera derivada* de una función y ello se hace mediante el límite anterior. Como se puede observar, es la derivada el concepto clave para anidar las derivadas como sigue, una n-ésima derivada se obtiene como se indica en el siguiente arreglo:

$$\Big(\big(((f)')'\big)\dots\Big)'$$

Este tratamiento es el que explica el encadenamiento entre una derivada y su consecutiva $f^{(n)} \longleftrightarrow f^{(n+1)}$, una a una:

$$f'' = (f')', f''' = (f'')', \dots, f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

Sostuve entonces, que la derivada como tal, por las razones anteriormente expuestas, sólo podría ser utilizada, o puesta en uso en escenarios diversos, sólo cuando se pudiesen articular las derivadas sucesivas, esto sólo hasta que se puedan establecer relaciones de subida y relaciones de bajada entre ellas:

$f \to f' \to f'' \to f''' \ldots$	$\ldots f''' \to f'' \to f' \to f$
Relaciones de "subida"	Relaciones de "bajada"

Ilustración. Relaciones de "subida" y de "bajada".

Esta hipótesis fue formulada después de un estudio socioepistemológico a profundidad, derivado de una problematización detallada del saber, para tener una ruta de acción didáctica. La noción matemática de derivada, que acompaña a la práctica de *predecir*, sólo será estabilizada entre los estudiantes hasta que sea usada como una articulación conveniente de las derivadas sucesivas. Sostuvimos desde esos años, que la razón principal por la que no era posible articular a las derivadas sucesivas en el aula actual obedecía a la ausencia de escenarios de intermediación socioculturales que trataran con procesos de cambio y variación. Pues la limitante de orden fisiológico, plantea al ser humano una incapacidad funcional.

Las personas no estamos dispuestos fisiológicamente para percibir variaciones de orden mayor, particularmente dicha limitación se expresa desde el orden tres. Nos es imposible entender a cuatro personas hablando simultáneamente; no podemos "recordar" corporalmente movimientos realizados con aceleración variable; en la esfera del habla, al nivel lingüístico, usamos tres estados para describir adverbios de tiempo, antes —ahora— después. De este modo, afirmamos que ante la incapacidad de percibir variaciones a voluntad, debemos articular, en un todo, a las variaciones de orden menor y asumir como constantes (*mecanismo de constantificación*) a las de orden mayor. Por ello, en nuestras interacciones lingüísticas solemos reducir las expresiones comparativas a dos variaciones con tres estados. Este conjunto de estados $\{E_i\}_{i=1,2,3}$ y el correspondiente conjunto de variaciones $\{v_j\}_{j=1,2}$ se relacionan entre sí como sigue:

$$E_1 \overset{v_1}{\leftrightarrow} E_2 \overset{v_2}{\leftrightarrow} E_3$$

Si no son consecutivos los estados, una articulación entre variaciones se hace necesaria, la denominaré "suma" de variaciones y se denota con el símbolo $\oplus$. Que significa en verdad, variaciones de orden superior.

$$E_1 \xleftrightarrow{v_1 \oplus v_2} E_3$$

En forma sintética, ambas formas de variación quedan ilustradas en el siguiente diagrama:

$$\overbrace{E_1 \overset{v_1}{\leftrightarrow} E_2 \overset{v_2}{\leftrightarrow} E_3}^{v_1 \oplus v_2}$$

Ejemplifiquemos con un caso muy sencillo, aunque igual se puede hacer para entidades más complejas como propagación de calor y consolidación de suelos finos saturados. El caso sencillo será el siguiente: consideremos que E_1 representa a la altura de un árbol al momento actual y E_2 a su altura un año después, v_1 muestra entonces el incremento de la altura, su variación de crecimiento. Si E_3 es la altura del árbol dos años después, v_2 exhibe el incremento en la altura durante el segundo año. De modo que $v_1 \oplus v_2$ habla en nuestro modelo analítico como el cambio del cambio, es decir, del cambio en los incrementos. Esto en términos del Cálculo se expresaría como una función del tiempo localmente lineal, del siguiente modo:

$$v_1 \oplus v_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}.$$

Este objeto formal, si bien perceptible y calculable, resultaba complicado de tratar para variaciones posteriores del tipo:

$$[v_1 \oplus v_2] \oplus [v_2 \oplus v_3]$$

Mientras que resultaba ininteligible para estudiantes y profesores si considerábamos un orden mayor al anterior:

$$\big[[v_1 \oplus v_2] \oplus [v_2 \oplus v_3]\big] \oplus \big[[v_2 \oplus v_3] \oplus [v_3 \oplus v_4]\big]$$

En estos años, estuve interesado en saber si dichas limitaciones sobre la interpretación de las variaciones de orden superior tenían una contraparte cultural que pudiese localizarse al nivel de las prácticas cotidianas. Esto fue confirmado experimentalmente, pues las comparaciones del tipo "tres estados", como en la *polis* griega, caracterizan a nuestras habituales formas discursivas, formas culturalmente aceptadas para una comunicación social. Estas formas *tripartitas* de estados vecinos, se construyen colocando invariablemente dos estados extremos, el uno y su opuesto, a fin de comparar la evolución de una magnitud o un atributo. Se le nombra E_1 al menor de los estados y E_3 al mayor. Se construye entonces un estado intermedio, que llamaremos estado de transición, en nuestro ejemplo el E_2. Este estado transitivo tiene características ambivalentes pues participa, de algún modo, de las características de ambos estados extremos.

Algunos ejemplos extraídos de la vida cotidiana sirven para comparar estados como hemos señalado. Para comparar la temperatura, utilizamos los vocablos: *frío*, *tibio* y *caliente*, correspondientes respectivamente con E_1, E_2 y E_3. Para identificar estados intermedios y poder dar variabilidad al proceso tratando con estados y posiciones intermedias, utilizamos adverbios de cantidad como: muy, mucho, bastante, poco, demasiado, más, menos, tan, tanto... Así la escala crece, *muy caliente*, *más fría, bastante tibia*… Tendremos que algo caliente puede estar aún "más caliente", y se dice "está muy caliente"; algo "por debajo" de frío es muy frío. No tan caliente es "apenas caliente" o "casi caliente" o de plano tibio. Así en nuestros discursos comunicativos empleamos sistemáticamente el pensamiento y lenguaje variacional. Los rangos en el asado de la carne se conocen como *jugosa, a punto* y *cocida*, a continuación se "adverbian" con *muy cocida*, *casi a punto*, *entre cocida* y *a punto*, etc. Las alturas de las personas se distinguen entre, bajo, medio y alto; las posiciones de cercanía relativas: *cerca*, *aquí* y *lejos*, y de este modo seguimos con un largo etcétera.

En consecuencia, mediante el uso cotidiano de la lengua natural, se fueron construyendo adverbios de modo, tiempo, ubicación, cantidad o grado para tratar con situaciones variacionales. Para ello se construyeron esquemas y estrategias variacionales. Miremos algunos ejemplos clásicos como adverbios: a) adv. de modo: *bien*, *regular*, *mal*; b) adv. de tiempo: *ayer*, *hoy*, *mañana* y c) adv. de cantidad o grado: *nada*, *poco*, *mucho*. Todos poseen una estructura simétrica y reversible, por esa razón las relaciones adverbiales permiten al discurso una flexibilidad mayúscula, pues las relaciones grande-pequeño o pequeño-grande, se traducen de inmediato en relaciones de crecimiento, decrecimiento o estabilidad. El uso del lenguaje en la vida cotidiana, antecede o acompaña al uso de las variaciones en matemáticas, pues el estudiante en su asignatura de Cálculo, ha desarrollado previamente un sistema discursivo para tratar con el cambio y la variación. *Sabe sin estudiar*. Sin embargo, en la enseñanza este acontecimiento fundamental de orden sociocultural no forma parte del contenido escolar por las restricciones debidas al discurso Matemático Escolar. Si acaso, el docente, a lo sumo, será quien vehicule en su propio discurso didáctico estrategias y esquemas variacionales situados.

De la gramática a la matemática

Utilicemos de inicio una analogía entre las flexiones adverbiales y la variación de funciones matemáticas. Llamaremos a cada una de estas formas de variación, tanto lingüística como matemática, como variaciones de *forma* I y II, respectivamente expresadas como sigue:

Variación de *forma* I	Variación de *forma* II
$E_1 \overset{v_1}{\leftrightarrow} E_2 \overset{v_2}{\leftrightarrow} E_3$	$E_1 \xleftrightarrow{v_1 \oplus v_2} E_3$
$E_i \overset{v_i}{\leftrightarrow} E_{i+1}$	$E_i \xleftrightarrow{v_i \oplus v_{i+1}} E_{i+2}$

Ilustración 1. Variaciones de *forma* I y II

Las variaciones de la *forma* I siguen un patrón de crecimiento secuencial, paso a paso: dado un estado cualquiera se continúa con el siguiente estado o con su antecesor. Mientras que las variaciones de la *forma* II, siguen un patrón de saltos no unitarios, en el sentido de que dado un estado, se pasa hacia algún estado posterior o anterior no consecutivo. La dificultad para el análisis de las variaciones de la *forma* II, radica en la no existencia de un sistema apriorístico de referencia, un sitio que sirva de origen para medir la variación, el cambio como tal, no existe sin referenciales. Por tanto, habrá de ser construido en cada caso. En este estado, el problema es quién construye el origen y el sistema de referencia, ¿respecto de qué? Decidir qué cambia, no es suficiente para estudiar el cambio. Quizá por la ausencia de dicho origen en el sistema de referencia no dispongamos de palabras para hablar de la tercera o cuarto o quinta… derivada.

Esta dificultad se asoma ya desde el manejo de la lengua misma, pues usamos *calentar* para dos tipos de variación diferentes:

$$Frío \xrightarrow{entibiar} Tibio \mid Tibio \xrightarrow{calentar} Caliente \mid Frío \xrightarrow{calentar} Caliente$$

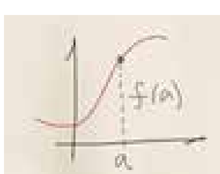
Equivalentemente, tendremos la misma situación para la relación de tipo inverso:

$$Tibio \xleftarrow{templar} Caliente \mid Frío \xleftarrow{enfriar} Tibio$$

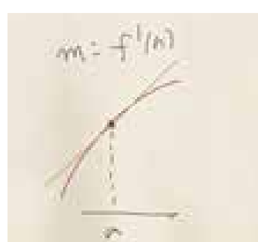
Digamos que para tratar la variación en este contexto, requerimos de tres datos y dos variaciones, o dicho de otro modo, de una relación cuadrática, pues como sabemos, con tres puntos no colineales en un plano, es posible determinar una única parábola que les contenga. Esto se extiende al ámbito de las ciencias y la tecnología al tratar con tres variables cuantificables como: *posición*, *velocidad* y *aceleración*, o en Cálculo al clasificar objetos geométricos con sentido variacional: *ordenada*, *pendiente* y *concavidad*. Se tienen la unicidad en la solución del sistema.

Una pregunta saltó entonces a nuestra vista durante esos años, ¿por qué razón no existe palabra para describir al *cambio de la aceleración*? La posición corresponde a *f*, la velocidad se asocia con *f'* y la aceleración a *f''*, pero no hay palabra que acompañe a la tercera derivada en el ámbito de la física, ¿qué concepto es *f'''*? Algo semejante ocurría con el significado gráfico de las derivadas en *Calculus*. La función *f* representa a la ordenada, *f'* la pendiente de la recta tangente y *f''* la concavidad de la curva, pero *f'''* no tiene significado asociado.

f
ordenada



f'
pendiente



f''
concavidad

Ilustración. ¿Quién es *f'''*?

En el caso de la Física clásica, podíamos entender como natural que no usaran una tercera variación, pues con la segunda ley de Newton se estipula que en el sistema masa-aceleración, la masa y la aceleración son constantes, por tanto se puede encontrar que en la segunda ley de Newton la ecuación diferencial que describe al sistema hace uso exclusivo de una derivada segunda, no precisa por tanto de la tercera derivada, o bien, ésta es cero:

$$F = ma = m\ddot{x} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Para encarar esta tarea, realizamos una serie de experiencias educativas a fin de probar dicha hipótesis y contestar la pregunta. En todos los casos estábamos interesados en saber cómo comparaban, cómo secuenciaban y cómo articulaban las variaciones de orden mayor. Introdujimos variantes experimentales que hacían uso de tecnología digital, con experiencia física, con materiales concretos y consideramos variantes socioculturales para los diseños.

En síntesis, lo único permanente es el cambio. Medir su evolución precisa de la consideración de estados vecinos, secuenciarlos y compararlos en un sistema particular de referencia. Predecir el estado futuro del cambio, dependerá de la naturaleza del movimiento (determinista o indeterminista). Las estrategias del pensamiento variacional son capturadas por el lenguaje variacional derivado de las prácticas socialmente compartidas. Los estudios empíricos al respecto nos muestran regularidades formidables que ayudarán en la enseñanza de las futuras generaciones.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Subsecretaría de Educación Media Superior, Secretaría de Educación Pública.

Cantoral, R., Montiel, G., Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 18*(1): 5-17.

Modelación matemática e innovación, un enfoque combinado en la enseñanza del Cálculo Diferencial en Ingeniería

José Roberto Cantú González[10]

Resumen

La enseñanza de las matemáticas ha representado un verdadero reto para el docente, y el cálculo diferencial no es la excepción en el nivel universitario de las carreras de ingeniería, dado que sus estudiantes no siempre comprenden el alcance de esta materia en la aplicación de su profesión, o bien el uso que se le pueda dar en la vida cotidiana. Por otra parte, la didáctica convencional de enseñanza no ayuda a cambiar el anterior paradigma, dificultándose el aprendizaje en los estudiantes y generando así resultados no aprobatorios en esta asignatura. Este trabajo presenta una propuesta para la atención de la situación antes planteada y se basa en un enfoque combinado de uso de la modelación matemática y las tendencias didácticas de vanguardia para mejorar el desempeño del estudiante de ingeniería en el curso de cálculo diferencial.

Palabras clave

Modelación matemática, aprendizaje matemático, enseñanza del cálculo diferencial, pautas innovadoras.

[10] Universidad Autónoma de Coahuila. Correo-e: roberto.cantu@uadec.edu.mx

Introducción

El mundo de las matemáticas nos proporciona un cúmulo de oportunidades de interaccionar con otros campos del saber y la diversidad de las ramas que la componen es una verdadera invitación a adentrarse en ellas. Las matemáticas son al cerebro lo que el deporte es al cuerpo, y así podríamos seguir describiendo a todo lujo de detalle todas sus bondades, lamentablemente la opinión no siempre es compartida.

Basta con acercarnos a las aulas de clase para identificar que el conjunto de amigos de las matemáticas no agrupa una gran cantidad de elementos, esto lo podemos observar tanto en los niveles elementales como en el nivel universitario.

Particularmente en el nivel universitario al observar a los estudiantes de ingeniería industrial, que en teoría han sido filtrados por una vocación no orientada, ni a las artes ni a las humanidades, y que podríamos pensar que son suficientemente adeptos a las matemáticas, no siempre resulta así. En la realidad encontramos que esta rama de la ingeniería no cubre en sus planes de estudio un enfoque netamente matemático, factor que es paralelo al hecho de la pobre vocación por los números de sus estudiantes, sin embargo al margen de esto, no debería necesariamente resultar en bajas calificaciones, después de todo sabemos que existen estudiantes sobresalientes en materias que no constituyen la esencia de su vocación y que sin embargo les es interesante.

Sin importar la rama de la ingeniería de que se trate, es común detectar en sus estudiantes un gusto por el desempeño de su carrera, pero en áreas donde no siempre se presentan las matemáticas como requisito, es decir, los estudiantes se ubican en el desempeño de las áreas de gestión de acciones, en las administración de los proyectos, en el uso de programas de computación para diseño y cálculo, en el liderazgo del recurso humano, en mediciones, etc., pero no así en la resolución de problemas mediante el cálculo diferencial y menos aún en el desarrollo de acciones encaminadas a la aplicación de otras ramas de las matemáticas.

La explicación del porqué enfrentamos tal situación puede involucrar a una gran cantidad de variables, las cuales deben ser atendidas bajo diferentes enfoques y mediante la participación de diferentes disciplinas. El presente trabajo no estudia el contexto psicológico del proceso de enseñanza-aprendizaje ni las circunstancias particulares del estudiante y el maestro, tampoco busca resolver un problema de contexto local, más bien a partir de la identificación de éste y su coincidencia con situaciones universales pretende aportar pautas en la enseñanza para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes de ingeniería en la materia de cálculo diferencial, donde el fundamento de tal mejora se basa en ganar el interés de los estudiantes por la materia, producto de utilizar un enfoque combinado de estrategias innovadoras de educación y el uso pertinente de la modelación matemática.

Antecedentes del aprendizaje matemático

El aprendizaje de las matemáticas ha sido abordado bajo diferentes ópticas y en los diferentes niveles de la educación, desde niveles elementales hasta el nivel universitario.

Aprendizaje matemático en la infancia

Al analizar los estudios realizados sobre el aprendizaje matemático en la infancia, se observa que los autores se han basado en diversas corrientes, de las cuales destacan: el aprendizaje mecánico basado en la memorización vía ensayo-error de Thorndike (Thorndike, 1931); el de origen constructivista y denominado aprendizaje de comprensión significativa de Ausubel, el cual es opuesto al mecánico y manifiesta que los conocimientos previos conectan con los nuevos generando un nuevo aprendizaje (Ausubel, 1963); o bien, el enfoque de Piaget sobre la construcción de los conceptos numéricos y aritméticos cuyos requisitos previos se estructuran en la combinación de las operaciones lógicas y la interacción activa a la experiencia física o socialmente trasmitida (Piaget, 1985).

Por supuesto, la evolución de la educación matemática puede seleccionar elementos particulares de cada corriente, aunque en el balance general la didáctica del aprendizaje basado en la memorización es cada vez menos apoyada, en su lugar imperan los aspectos relacionados a la práctica y la creación de un ambiente motivante de parte del docente, todo esto con el propósito de generar mejores resultados en los pequeños.

El aprendizaje del cálculo diferencial en el nivel universitario

El anterior análisis es de gran valor al tratar el caso particular del aprendizaje matemático en niveles universitarios, específicamente para nuestro interés relacionado con el tema del cálculo diferencial en estudiantes de ingeniería. Pues bien, para este caso particular del aprendizaje matemático se distinguen elementos que aportan comportamientos semejantes a los analizados en las investigaciones del nivel elemental, lo cual nos permite entender que el rendimiento de estos estudiantes se rige, al menos en el plano del entendimiento, por los mismos fundamentos que afectan a los niños. Por tanto, no es descabellado aplicar las teorías asociadas con los pequeños en la atención de la problemática de los jóvenes.

Ahora bien, con frecuencia el estudiante de cálculo diferencial de bajo rendimiento presenta bases algebraicas débiles, baja autoestima resultado de fracasos continuos en la solución de los problemas y carencia de pautas de conexión con el mundo cotidiano, lo que genera en el alumno una incapacidad al analizar cada problema a resolver; situación que parece explicar lo señalado por (Artigue, 1998), sobre las dificultades asociadas al análisis en el aprendizaje del cálculo diferencial, las cuales se describen a continuación:

- Las dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos de este campo conceptual: los números reales, las funciones y las sucesiones, objetos que están siempre en fase de construcción cuando se empieza la enseñanza del análisis.
- Las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de límite, que es la noción central del campo, y a su dominio técnico.
- Las dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico.

Evidentemente las tres anteriores dificultades se asocian al fundamento de la estructura de la comprensión de los aspectos lógicos en el cálculo diferencial, que a su vez no requieren de procesos mecánicos de aprendizaje para su entendimiento; enfoque también observado en los estudios del aprendizaje matemático en el niño y que son avalados por Ausubel, Brownell y Piaget (Hernández Piña y Soriano Ayala, 1997).

Identificación del problema

Generaciones van y generaciones vienen y se observa el mismo patrón: Nuestros estudiantes de ingeniería industrial parecen no interesarse por las matemáticas y tienen un rendimiento muy pobre, ya desde el primer semestre con el cálculo diferencial se puede observar su actitud apática hacia la materia.

Este fue el sentir de uno de los docentes de matemáticas de cierta escuela de sistemas durante una conversación informal entre colegas universitarios, desafortunadamente nadie tuvo argumentos para oponerse a tal percepción, en su lugar el consenso entre los mismos no se hizo esperar al corroborar datos que justifican el comentario.

Desafortunadamente lo que en un principio era una percepción ha pasado a ser más que ello, y no es exclusiva de un solo centro universitario, dado que el comentario es común entre colegas de diferentes universidades, es claro que el problema va más allá de ser exclusivo del cálculo diferencial, dado que puede significar una fuerte amenaza tanto por las habilidades de análisis y cálculo numérico que pueden perderse al no comprender la materia, además es un hecho irrefutable la afectación a las materias subsecuentes derivado de las carencias adquiridas en el cálculo diferencial.

Esta situación parece repetirse con el paso de las generaciones, lo que puede significar un obstáculo en las competencias de quienes verdaderamente hacen ingeniería, hecho explicable al menos en el entendido de que el cálculo diferencial y las matemáticas en general son herramienta y fundamento de la explicación de numerosos problemas asociados al estudio de la ingeniería; por supuesto su desconocimiento o falta de atención al tema daría lugar a la continuidad de capacidades cuestionables en nuestros ingenieros.

Es pues entendido que es imperativo establecer un plan de reacción ante esta adversidad, sin embargo mejorar el rendimiento académico en el cálculo diferencial demanda un análisis completo, que como antes se mencionó puede integrar diferentes perspectivas, desde el enfoque de este trabajo, es conveniente mejorar las estrategias de enseñanza en que incurren los maestros en este tiempo.

Análisis de la problemática

Sondeo de percepciones: para el análisis de la problemática se estableció un sondeo entre maestros y alumnos de la ESMRV de la UADEC donde las percepciones generalizadas se plantean en la figura 1, mismas que reflejan la necesidad de un cambio de estrategia metodológica en la enseñanza del cálculo diferencial.

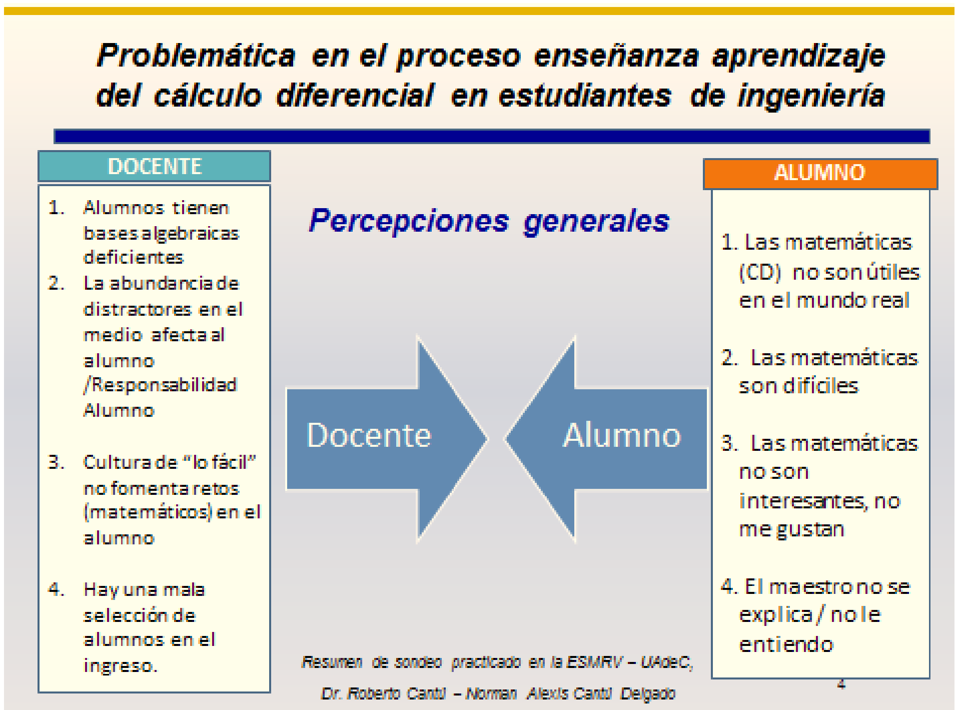


Figura 1. Percepciones generales de la problemática en el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial en estudiantes de ingeniería.

Resultados del sondeo

Las conclusiones antes obtenidas han sido verificadas mediante datos fehacientes que avalan el ejercicio.

Análisis de las percepciones generales

Se observan dos tipos de percepciones, la de los alumnos cuya orientación parece buscar la culpabilidad tanto en las mismas matemáticas como en el maestro; y las percepciones de los maestros que se orientan a la apatía del alumno y a causales externas a la acción de la enseñanza como pueden ser: enseñanza de anteriores maestros, programas de estudio, situaciones personales del alumno, la educación recibida de los padres y el entorno cultural y finalmente el método de selección de la carrera.

Sobre las causas externas a la acción de la enseñanza del docente nada se puede hacer, o al menos no es tarea de este trabajo; a su vez, las causas relacionadas con la apatía del estudiante se orientan a patrones de formación de valores o en su lugar tienen que ver con la acumulación de actividades adicionales al estudio, ambos casos recaen también sobre el rubro de causas externas y por tanto tampoco podemos hacer nada, entonces sólo nos queda analizar aquellas causas que el alumno atribuye a la responsabilidad del maestro y a las mismas matemáticas, de ello se presenta un análisis subsecuente en la figura 2.

Percepción de alumnos	Alternativas de causas potenciales
1. Las matemáticas no son útiles en el mundo real	1.1 Los alumnos no conocen la aplicación y utilidad del cálculo diferencial en el desempeño de la ingeniería. 1.2 En el campo laboral que conocen no utilizan el cálculo diferencial.
2. Las matemáticas son difíciles	2.1 La metodología de enseñanza utilizada por el maestro no facilita el entendimiento del alumno. 2.2 El alumno aprecia dificultad en el cálculo diferencial porque no tiene bases para comprender el curso, porque no tiene una metodología del estudio apropiada o bien porque no cumple con sus responsabilidades en clase y extra clase.
3. Las matemáticas no son interesantes, no me gustan	3.1 La metodología de enseñanza utilizada por el maestro no incorpora elementos de motivación en el alumno. 3.2 La metodología de enseñanza no incluye aspectos prácticos que el alumno observe en la vida cotidiana.
4. El maestro no se explica / no le entiendo	4.1 La metodología de enseñanza utilizada por el maestro no facilita el entendimiento del alumno. 4.2 El maestro utiliza un lenguaje incompatible con el alumno.

Figura 2. Análisis de causas potenciales del bajo desempeño de estudiantes. Perspectivas del alumno

Análisis de las percepciones particulares del alumno

Filtrando el análisis enfocado en las percepciones del alumno y en las correspondientes alternativas de causas potenciales encontramos que:

La causa potencial 2.2 atiende un contexto ajeno a la enseñanza del cálculo diferencial en el maestro actual o bien se trata de un problema de responsabilidad del alumno.

Las causas 1.1, 1.2 y 3.2 muestran la necesidad de incorporar esquemas prácticos en la enseñanza del cálculo diferencial, particularmente mediante la solución de problemas de la vida cotidiana o bien de aplicación en el ámbito del ejercicio de la carrera de ingeniería.

Las causas 2.1, 3.1, 4.1 y 4.2 muestran la necesidad de incorporar “humanización” a la enseñanza del cálculo diferencial, es decir aplicar a las técnicas de enseñanza una sensibilización tal que permita por una parte despertar la responsabilidad que le compete al estudiante en la materia, pero también el docente debe crear una atmósfera que facilite la relajación del estudiante, donde éste pueda sentirse en confianza a tal grado de facilitar la comprensión de los temas. Para tal efecto y dado que el idioma utilizado es el mismo en los estudiantes, conviene utilizar técnicas donde el alumno pueda motivarse y a la vez sea inspirado en la atención de cada tema, donde por supuesto sea retado constantemente en forma gradual en términos de dificultad en la solución de problemas.

Conclusión del análisis

Por todo lo anterior, podemos deducir que la esencia del problema en el aprendizaje del cálculo diferencial en el caso específico antes analizado radica en que el docente no parece utilizar una estructura sólida en su metodología de enseñanza; no observándose evidencia de aplicación del aprendizaje significativo, corriente pedagógica del constructivismo que se opone al aprendizaje mecánico y repetitivo, y que en su lugar se dirige a realizar un proceso de actualización de los esquemas de conocimientos relativos a la situación en consideración (Ausubel, 1963; Novak, 2011), tampoco parece aplicar las enseñanzas relacionadas con la importancia de incorporar la socialización entre los alumnos (Piaget, 1985), razón que argumenta la necesidad de implementar medidas que incorporen esquemas basados en esas corrientes y que a su vez representen una solución del problema.

Modelación matemática, herramienta en la enseñanza del cálculo diferencial

Modelación matemática como tendencia de la Educación Matemática

Las tendencias generales en la Educación Matemática se enfocan desde fines del siglo xx en: la importancia de las aplicaciones, el establecimiento de una nueva unidad de las matemáticas y la presencia de la computadora como elemento de apoyo (Hilton, 1894).

La modelación matemática es sin lugar a duda una herramienta que encaja perfectamente en las tendencias señaladas, dado que ofrece la oportunidad de servir de apoyo para atender problemas prácticos (Biembengut y Hein, 2004) y si la combinamos con el uso de programas computacionales como Geogebra, Graph y el Scilab, que son de tipo libre, sin costo, y se encuentran al alcance en internet (por supuesto existen otros que se encuentran a la venta), cubren perfectamente las categorías 1 y 3 de Hilton, lo que hacen de la modelación un elemento incuestionable de las nuevas tendencias de la Educación Matemática.

Concepto y orígenes

El concepto de modelación matemática, en el estricto sentido de su nombre, existe desde la aparición de las ciencias exactas, dado el deseo de los hombres de ciencia por resolver los problemas que constituían la temática de su estudio. Este argumento anterior nace al analizar la definición de (Camarena, 2012):

> La modelación matemática se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un evento u objeto del área del contexto.

La utilización de los programas de computación en el desarrollo de la Modelización matemática es una acción que en nuestros días se entiende como implícita, tanto en las tareas de construcción del modelo como en las de desarrollo de las gráficas, sin embargo es importante entender que aunque los programas de computadora juegan un papel de gran utilidad, no deben ser considerados como el recurso indispensable para hacer modelización matemática.

De igual manera es importante cuidar de no incurrir en el error de basarse de forma integral en el uso de estos programas de computación para la enseñanza de las materias asociadas a algún tipo de matemáticas.

Resumen del método de Modelación Matemática

La figura 3 muestra un resumen generalizado sobre el método de modelación matemática, el cual está basado en un análisis personal y los esquemas presentados en Biembengut y Hein (2004) y Bassanezi y Biembengut (1997).

Pasos de la modelación matemática	Explicación de cada paso
1. Elección del tema	Aunque el tema debe ser elegido por el alumno, es válido que el docente ponga a elección de la clase los ejemplos a tratar. El tema es elegido mediante asociación con preguntas de investigación.
2. Determinación de las fuentes de investigación	Ubicación de las fuentes de investigación para acceder a los datos cuantitativos
3. Formulación del problema	Planteamiento del problema vía ecuaciones y flujos de acción.
4. Generación de hipótesis	Mediante la generación de la hipótesis deberán identificarse las variables que la contienen.
5. Sistematización mediante el análisis de analogías	En este paso se pueden revisar problemas análogos y utilizar programas de computación para graficar similitudes que a la postre será la base para la solución.
6. Formulación del modelo matemático	La formulación del modelo debe incluir la utilización de las variables planteadas y deberá responder a la formulación del problema.
7. Validación del modelo	La validación representará las pruebas que comprueben el estado de “correcto” en el modelo formulado.

Pasos de la modelación matemática	Explicación de cada paso
8. Resolución del problema a partir del modelo validado	Los alumnos deberán regresar al problema inicial que generó el proceso para su comparación con el resultado.
9. Interpretación final	La solución del problema debe aportar elementos concluyentes en una forma analítica-gráfica.

Figura 3. Resumen del método de modelación matemática
Fuente: Elaboración propia.

Pautas innovadoras recomendadas en la enseñanza del cálculo diferencial de acuerdo con las percepciones originales de los alumnos

De las diferentes percepciones de los alumnos mencionados en el análisis de la problemática, se han generado dos grupos por su afinidad, de las cuales las percepciones 2 y 4 se agrupan entre sí y tienen en la figura 4 un modelo sugerido de atención para eliminar la dificultad del cálculo diferencial. Por otra parte el grupo formado por las percepciones 1 y 3 se presenta a continuación con sus correspondientes estrategias recomendadas:

Grupo de percepciones 1 y 3: Matemáticas (cálculo diferencial) útiles e interesantes.

A. Las matemáticas no son útiles en el mundo real:

- Fomentar continuamente la utilidad de las matemáticas y el cálculo diferencial en particular en el mundo real mencionando casos específicos.
- Invitar a profesionistas / maestros de otras áreas para manifestar la necesidad de la matemáticas y el cálculo diferencial en particular como recurso.

B. Las matemáticas no son interesantes, no me gustan

- Enlazar el cálculo diferencial con las aplicaciones de la vida cotidiana y con el ejercicio de la ingeniería.

- Utilizar la tecnología de la información a través de programas de computación, videos, aplicaciones móviles y otros como medio de apoyo, más no como un fin.

Grupo de percepciones 2 y 4: Modelo propuesto para eliminar la dificultad en el cálculo diferencial.

Figura 4: Modelo propuesto para eliminar la dificultad en el cálculo diferencial

Conclusiones

- Partiendo del contexto de la enseñanza, para combatir el bajo interés por el cálculo diferencial y consecuentemente el rendimiento pobre en los alumnos en esta materia, es imperativo incorporar al método de enseñanza utilizado por el docente, una serie de estrategias basadas en las corrientes de Ausubel y Piaget, aprendizaje significativo y el enfoque en la socialización del estudiante, respectivamente.
- La modelación matemática ha sido probada y aceptada por diferentes autores desde mediados del siglo xx, sin embargo requiere de un esfuerzo significativo para incorporar los conceptos en todo el contenido de la materia de cálculo diferencial, dado que en las aplicaciones de la derivada es claramente factible, no así en otras temáticas de la materia.

- Se recomienda que el docente genere una atmósfera agradable en el aula donde el alumno se sienta con la confianza para preguntar sobre cualquier duda.
- El éxito en el aprendizaje matemático del cálculo diferencial es alcanzable mediante la participación del binomio docente-alumno, el esfuerzo por la mejora de uno de ellos es inútil cuando la otra parte no pone igual empeño.
- La motivación del docente sobre los temas del cálculo diferencial se enfatiza en su actitud para acentuar la importancia de la responsabilidad del alumno frente a la materia, la necesidad del mismo en aprender la temática para el desarrollo de sus habilidades profesionales y la presentación de aplicaciones de la materia al contexto real.
- Los materiales de clase deben ser desarrollados basados en teoría y modelación.

Bibliografía

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Relime, 1*(1), 40-55.

Ausubel, D. P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning.* New York: Grune & Stratton.

Bassanezi, R. C., y Biembengut, M. S. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación un nuevo método de enseñanza. *Revista de didáctica de las matemáticas,* (32), 13-25.

Biembengut, M. S., y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafios para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16*(2), 105-125.

Camarena, P. (2012). La matemática en el contexto de la ciencia y la modelación. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 7*(10), 183-193.

Hernández, F., y Soriano, E. (1997). *La enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo de la educación primaria: una experiencia didáctica.* Murcia, España: Universidad de Murcia: Servicio de Publicaciones.

Hilton, P. J. (1894). Current Trends in Mathematics and Future Trends in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics, 4*(1), 2-8.

Novak, J. D. (2011). A theory of education: Meaningful learning underlies the constructive integration of thinking, feeling and acting leading to empowerment for commitment and responsibility. *Aprendizagem Significativa em Revista/Meaningful Learning Review, 1*(2), 1-14.

Piaget, J. (1985). *Psicología y epistemología* (Reimpresión al español ed.). Barcelona, España: Editorial Planeta-De Angostini SA.

Thorndike, E. L. (1931). *Human learning.* New York: Century.

Aceptando la existencia de una figura inexistente: los argumentos de profesores y estudiantes de Topografía

Lidia Aurora Hernández Rebollar, José Antonio Juárez López y Josip Slisko Ignjatov[11]

En esta investigación se reportan los diferentes argumentos que presentaron profesores y estudiantes de Ingeniería en Topografía cuando se les cuestionó acerca de la existencia de un terreno, el cual apareció en el contexto de una actividad del libro de texto de matemáticas de 5º grado de primaria en México. El terreno de este problema es un polígono irregular, el cual, con las medidas de los lados que ahí aparecen, es imposible que exista en la realidad. En investigaciones previas se detectó que es difícil percibir el error en esta figura para profesores de primaria en servicio y que los argumentos que ellos proporcionaron para justificar la existencia de dicha figura fueron de tipo pragmático. La investigación, que aquí se reporta, centra su atención en especialistas en medición de terrenos con la finalidad de explorar la influencia del conocimiento de su profesión en su argumentación.

Introducción

No cabe duda que la argumentación es una competencia importante a desarrollar en estudiantes de todos los niveles educativos. Sin embargo, ¿cómo desarrollarla en los alumnos si los docentes no la poseen? La investigación sobre los argumentos de los docentes es escasa. Llama la atención la de

[11] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (BUAP). Correo-e: Lidia Henández, lhernan@fcfm.buap.mx / José Antonio Juárez, correo-e: jajul@fcfm.buap.mx / Josip Slisko, correo-e: jslisko@fcfm.buap.mx

Alatorre, Flores y Mendiola (2012), quienes reportan algunas deficiencias en el razonamiento, la argumentación y la comunicación de profesores de primaria en servicio y, como consecuencia, sugieren incluir actividades que fortalezcan estas habilidades en su formación.

El modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza, propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008) ha sido usado para el análisis del conocimiento del profesor de matemáticas y para el diseño de tareas que mejoren su práctica. Este modelo contempla seis subdominios de conocimiento, tres referentes al conocimiento de la materia y otros tres al conocimiento didáctico del contenido. En el conocimiento de la materia incluye el común, el especializado y el horizonte matemáticos. En el didáctico del contenido, el modelo de estos investigadores considera el relativo a la enseñanza, al de los estudiantes y al del currículo. El razonamiento deductivo y la argumentación no han sido señalados de manera particular en este modelo, sin embargo, desde nuestro punto de vista, corresponde al conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Es claro que buena parte del discurso del profesor se realiza mediante argumentos y que el razonamiento deductivo debería de formar parte de su conocimiento profesional.

Toulmin (1958) explica que un argumento está constituido por datos, justificaciones o garantías y una conclusión, y que, dependiendo del campo de la argumentación, existen diferentes tipos de garantías las cuales le dan diferentes grados de fuerza a la conclusión.

Knipping (2004) enfatiza que es importante analizar el discurso y las argumentaciones para un mejor conocimiento de ciertos tipos de pruebas y sus implicaciones en la enseñanza. Otros investigadores también lo han considerado así, como Tapan y Arslan (2009) y León y Calderón (2001), quienes estudiaron los argumentos elaborados por profesores y estudiantes. En general, los reportes sobre estas investigaciones arrojan información interesante sobre los recursos que usaron los participantes y los tipos de argumentos expuestos.

Con respecto a la argumentación de los estudiantes, gran parte de la investigación realizada sobre las pruebas y demostraciones se ha enfocado en diferentes tipos de razonamiento y los argumentos que utilizan los estudiantes durante los procesos de demostración (Crespo y Farfán, 2005).

En su estudio, Monzón (2011) concluye, entre otras cosas, que el número de investigaciones realizadas en México en torno al tema de la argumentación es escasa y la mayoría de ellas se enfocan en el nivel básico y medio.

Para contribuir al conocimiento del proceso argumentativo en matemáticas nos planteamos el objetivo siguiente: analizar los tipos de argumentos que proporcionan especialistas y novatos en topografía ante la posible existencia o no de una figura geométrica, para detectar si su conocimiento profesional influye o no en sus argumentos y si estos hacen uso de recursos matemáticos como la desigualdad triangular.

Las variables a observar fueron, detección o no del error en la figura, la presencia o no de garantías y los tipos de éstas. Entre las garantías que se esperaban, buscamos con influencia de la profesión y con elementos matemáticos.

Esta investigación forma parte de una más amplia acerca de los argumentos que presentan los docentes para justificar o rechazar la existencia de una figura geométrica imposible. Dicha investigación tiene la finalidad de comparar los diversos argumentos que proporcionan los docentes de diferentes niveles educativos y resaltar las características de estos como son los tipos de garantías que ofrecen (de acuerdo al modelo de Toulmin) y, en general, el tipo de argumento que formulan según la clasificación de Balacheff (2000).

Investigaciones previas

En el libro de matemáticas de 5º grado de primaria, publicado en el año 2010, aparecía el problema "El terreno del señor Javier" en el cual se pedía calcular el número de rollos de malla necesarios para cercar un terreno (ver la figura 1). Sin embargo, al observar la figura del terreno y las medidas de los lados se puede uno dar cuenta de que dicha figura no puede existir en la realidad, debido a que con las medidas expuestas la figura no cerraría. Investigaciones previas nos han revelado que para la mayoría de las personas no es fácil detectar este error en las medidas de los lados y que, cuando se les solicita argumentar sobre la existencia o no existencia de este terreno, no utilizan propiedades geométricas. Una de esas investigaciones se hizo con 69 profesores de primaria en servicio y uno de los resultados fue que solo 3 percibieron que había un problema con la figura (Juárez, Hernández y Slisko, 2014). Otro resultado importante fue que todos los argumentos que proporcionaron para argumentar que dicha figura sí podía existir en la realidad fueron de tipo pragmático.

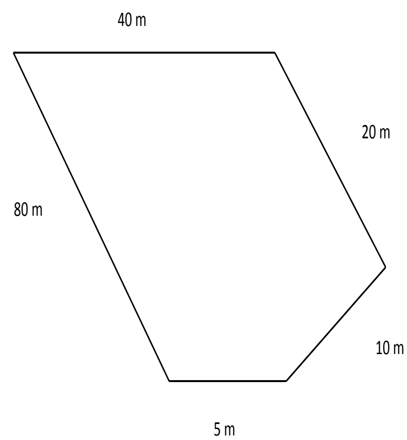


Figura 1. Imagen similar al terreno imposible que apareció en el libro de texto matemáticas de 5º grado de primaria de 2010.

Varios investigadores han centrado su atención en los argumentos y los tipos de pruebas, tanto de estudiantes como de profesores de matemáticas. En las líneas que siguen resumimos algunas de estas investigaciones.

Balacheff (2000) clasifica los tipos de pruebas o demostraciones en pragmáticas e intelectuales, en las primeras considera dos niveles, empirismo ingenuo y ejemplo crucial, mientras que en el segundo tipo considera otros dos niveles, ejemplo genérico y experimento abstracto.

León y Calderón (2001) estudiaron los argumentos que exponen estudiantes de nivel superior pero centran su trabajo en la elaboración de una clasificación de los recursos matemáticos que emplearon estos estudiantes. En la manifestación de recursos argumentativos de tipo matemático observaron que, cuando los estudiantes trabajaban de manera individual, usaban argumentos empíricos y de influencia externa. Al trabajar en parejas usaron argumentos con mayor elaboración matemática y de tipo discursivo. Finalmente, al presentar su prueba al grupo, sintieron la necesidad de usar argumentos de tipo explicativo. Estas autoras concluyen que, en la elaboración de argumentos predominó más la representación matemática que la discursiva y el criterio de que "mostrar" el proceso realizado se considera suficiente para convencer.

En una investigación realizada con profesores en formación, Tapan y Arslan (2009) mencionan que dichos profesores tendieron a usar argumentaciones pragmáticas basadas en elementos visuales puros. Lo anterior ocurrió cuando se les pidió trazar un triángulo equilátero y argumentar la validez del método usado para la construcción de tal figura. En su investigación concluyen que los profesores en formación usaron excesivamente los elementos visuales, tanto para la construcción como para sus justificaciones y que el empirismo ingenuo es el tipo de argumentación que predominó.

Knipping (2004) expone en su estudio los diferentes tipos de argumentaciones que pudieron ser reconstruidos en las diversas demostraciones y justificaciones del Teorema de Pitágoras que observó en aula. Para ella, los argumentos pragmáticos son aquellos que están basados en acciones, pudiendo ser de tipo constructivo o métrico; mientras que los argumentos semánticos pueden ser de varias clases: visual-intuitivo, computacional, metafórico y analógico.

Para analizar los argumentos, nos hemos apoyado en la estructura y usos dados por Toulmin (1958). Además, consideramos las ideas de Balacheff (2000), quien clasifica los tipos de pruebas o demostraciones. Esta teoría básica sobre la argumentación ya ha sido utilizada para contribuir al conocimiento del proceso argumentativo en matemáticas y sus implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de las mismas por diversos investigadores como los que ya hemos mencionado en este apartado. Sus contribuciones a esta línea de investigación constituyen los antecedentes de este trabajo.

Muestra

Los participantes fueron tres profesores y veinticinco estudiantes de la carrera de Ingeniería en Topografía de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. Los sujetos fueron seleccionados al azar y accedieron a participar de manera voluntaria. Los estudiantes se encontraban a la mitad de su programa de estudios y los profesores no fueron consultados sobre su antigüedad como docentes. La aplicación del cuestionario se llevó a cabo en primavera 2012.

Instrumento

El cuestionario contenía la imagen de un terreno y de una actividad del libro de texto de 5º de primaria, en la cual se solicitaba calcular el número de rollos de malla necesarios para cercar el terreno, cuya imagen es similar a la figura 1. A los encuestados se les anotó que su tarea no era solucionar el problema sino contestar la pregunta "¿puede existir en la realidad el terreno que se muestra en la figura?" Las opciones de las respuestas fueron: a) Sí puede existir, b) No puede existir, c) No sé cómo decidir. Enseguida se les solicitó: Escribe detalladamente los argumentos que justifiquen tu respuesta.

Como mencionamos anteriormente, este terreno no puede existir en la realidad debido a que con las medidas que ahí aparecen no es posible que la figura cierre, por lo que la respuesta esperada era: No puede existir, y un argumento válido es alguno de los siguientes:

Las longitudes de los lados no corresponden con los números o medidas proporcionadas. El lado más largo tiene la etiqueta de 80 m, el segundo en longitud se dice que mide 40 m, sin embargo, se aprecia en el dibujo que el segundo no cabe dos veces en el primero. El resto de los lados están marcados con 20, 10 y 5 metros, pero igual que los dos primeros el lado que "mide" 5 no cabe dos veces en el que "mide" 10 y así sucesivamente. Si los lados tuvieran la longitud que se dice en el dibujo la figura no cerraría.

Este terreno tiene un lado cuya medida es mayor que la suma de los demás lados y esto no puede ocurrir en los polígonos. El lado que tiene la etiqueta de 80 m mide más que la suma del resto de los lados, que es de 75 m, lo cual es imposible. Lo anterior se demuestra aplicando la desigualdad del triángulo, sucesivamente, en los triángulos cuyo vértice común es el punto que une a los lados de 80 y 40 metros.

La hipótesis que nos planteamos es que los encuestados detectarían el error y utilizarían conocimientos propios de su profesión para argumentar la no existencia de este terreno.

Resultados y análisis

Para realizar el análisis de las respuestas dividimos a la muestra en dos grupos de acuerdo con la respuesta de la primera pregunta. Después, clasificamos los argumentos de los dos grupos resultantes. Sólo un sujeto respondió que no sabía cómo decidir pero, como su argumento fue para afirmar que sí puede existir, lo colocamos en el grupo de los que afirmaron que el terreno sí podía existir. Por esta razón, se obtuvieron sólo dos grupos de respuestas: No puede existir y Sí puede existir. Para distinguir a los sujetos involucrados en esta investigación se colocaron las etiquetas siguientes: A los estudiantes se les asignó la letra mayúscula E seguida de un número y a los profesores la letra mayúscula P seguida de un número.

Análisis de los argumentos de los que responden que no puede existir

Sólo cinco de los veintiocho encuestados afirmaron que este terreno no puede existir en la realidad, y sólo uno de estos da un argumento correcto: "el polígono no cierra con las medidas expuestas".

Uno más de este grupo argumenta: "las medidas no están bien proporcionadas, que no son creíbles", es decir, se da cuenta que los números que aparecen ahí no corresponden con la longitud de los lados, pero no alcanza a ver que este polígono no cerraría. El resto de los que afirman que no puede existir (3) dan como argumento principal que las medidas exactas no existen, como el profesor P1 afirma:

> No puede existir en razón de que en la realidad los vértices se señalan con objetos físicos y las longitudes entre estos se expresa estadísticamente y el problema planteado indica magnitudes exactas y no precisas que es una expresión probabilística.

En general, en este grupo observamos que utilizan conocimientos propios de su profesión, en particular, el concepto de medida exacta, aunque lo utilizan erróneamente, pues ésta no es la razón por la que la figura en cuestión no puede existir. Todos los de este grupo, observaron las medidas y no sólo la forma, sin embargo, como se dijo al principio, sólo uno logró relacionarlas. El otro que detecta un problema en las medidas afirma que éstas no son creíbles pero no explica más, por lo que no podemos determinar si alcanzó a ver la incongruencia entre las medidas y la forma. En los tres, que recurrieron al concepto de medida exacta, es curioso observar cómo un conocimiento propio de la profesión interfiere e impide obtener un argumento correcto.

Análisis de los argumentos de los que responden que sí puede existir

De los 28 encuestados, 23 afirman que este terreno sí puede existir en la realidad. La característica principal de los argumentos que proporcionan es que se basan principalmente en la forma del terreno, por lo que las garantías que ofrecen son: existen los terrenos irregulares, los polígonos irregulares o las figuras irregulares. En seguida mostramos algunos ejemplos:

- E23: Hay dos tipos de terreno de forma regular e irregular y las medidas pueden ser cerradas o decimales por lo tanto sí puede existir el terreno.
- P3: En la realidad existen también figuras llamadas irregulares.
- E20: El terreno con estas dimensiones si puede existir porque es muy difícil encontrar un terreno regular la mayoría tienen formas variadas y los terrenos generalmente se dividen de forma que sea aprovechado la mayor parte del terreno para su mejor utilidad y beneficio para el que lo vende, en su caso, aunque en la figura no se ve bien proporcionado de acuerdo a las medidas que especifica.

Algunos de los que afirman que sí existe, porque existen las figuras irregulares, refuerzan su discurso señalando alguna razón por la que existen los terrenos irregulares, como el estudiante E20, y otros que afirman que es: por las colindancias naturales (barrancas o ríos) o construidas anteriormente, por la repartición. Algunos ejemplos son los siguientes:

- E15: Sí se puede presentar este terreno en la realidad, ya que hay muchos lugares en donde ya se encuentran construcciones y los terrenos quedan geométricamente parecidos a estos como el ejemplo.
- E16: Las construcciones aledañas o también llamadas colindancias delimitan la forma del terreno, el cual presenta formas diferentes de acuerdo a su ubicación.
- P2: A principios de siglo la repartición de tierras se daba de manera irregular así fueron quedando las formas caprichosas en linderos a veces se repartían de acuerdo al área y no de acuerdo a medidas. Las formas naturales colindantes como barrancas, ríos, laderas, lagunas, etc., propician a trazar de esa manera el terreno.

Para dos de los encuestados la respuesta es sí puede existir porque no encuentran ninguna razón por la que no pueda existir, afirman que el terreno es normal, como lo siguiente:

- E7: Sí, puesto que no se ve en la figura algún o algo para que no pueda existir, tal vez no es una figura regular pero en la realidad a veces los terrenos llegan a tener variantes en sus lados queriendo decir así que cualquier terreno tiende a ser geométricamente diferente.

Para otros la respuesta es afirmativa porque no todos los terrenos son regulares, como el E20, ya mencionado, y el que sigue:

- E8: Este terreno sí puede existir, puesto que no todos los terrenos son cuadriláteros y con ángulos rectos (cuadrados, rectángulos) este puede ser para una casa que se encuentra en una esquina o un pequeño parque o el jardín de un fraccionamiento, no son muy comunes pero los puede ver como un lote minero.

Dos afirman que sí puede existir porque lo han visto en la práctica, uno de ellos mencionó:

- E13: Porque sí lo he visto en la práctica a la hora de hacer un levantamiento topográfico de un predio o a veces para la disputa de algún terreno, los polígonos que se miden casi siempre son irregulares.

Dos estudiantes más argumentan sobre la solución del problema y no sobre la existencia del terreno.

- E19: Primero sumas todos los lados del polígono y luego los divides con los 20 metros que tiene el rollo aquí el detalle es que la respuesta no debería de sobrar o faltar pedazos de rollo.
- E22: No se menciona con exactitud que los rollos de malla tienen que ser usados completamente y para resolver sólo se suman las distancias para sacar el perímetro y se divide entre los 20 m de rollo y da la solución, aunque ninguna medida da exacta.

Entre los que responden que sí puede existir este terreno hay cuatro que perciben un problema con las medidas, pero aun así afirman que sí puede existir, como (E14), (E20) y los siguientes:

- E24: Las medidas están un poco desproporcionadas pero podrían ser efectos de la imagen, pero indudablemente sí podría existir un terreno con dicha forma puesto que a veces los lotes colindantes no son de alguna forma regular.

- E25: Puede existir, es un terreno grande, no se encuentra detallado a escala, las distancias de acuerdo al dibujo no coinciden.

Conclusiones

Los resultados de esta investigación muestran que, en el análisis de la posibilidad de existencia del terreno, la atención de los sujetos se dirige exclusivamente hacia la forma y no hacia los datos numéricos de la figura 1, lo cual no se esperaba en especialistas y estudiantes de la carrera de topografía, la profesión que se basa en las mediciones de las distancias. El único participante que detectó el error y dio un argumento válido no recurrió a la desigualdad triangular para demostrar la imposibilidad de la existencia, sino que, argumentó que "el polígono no cerraría con estas medidas". Los que no detectaron el error y afirmaron que este terreno sí puede existir (23 de 28) se centraron únicamente en la forma del terreno, y sus argumentos se basaron, principalmente, en la existencia de los terrenos o de los polígonos irregulares. Sobresalen los que ofrecen además una explicación acerca del porqué de la irregularidad de los terrenos, para lo cual, hacen uso de su experiencia en la medición de terrenos.

Lo anterior coincide con los resultados encontrados entre los profesores de primaria en servicio, en el sentido de que se centran en la forma e ignoran las medidas y también coinciden en el sentido de que no recurren a la desigualdad triangular o a alguna otra propiedad geométrica para justificar su respuesta. Ya Alatorre et al (2012) han reportado que dicha propiedad no está presente en la práctica profesional de los profesores de primaria ni en su formación, y esta investigación sugiere que entre los topógrafos tampoco.

Referencias bibliográficas

Alatorre, S., Flores, P. & Mendiola, E. (2012). Primary teachers' reasoning and argumentation about the triangle inequality. In Tso, T. Y. (Ed.). *Proc. 36th Conf. of the Int. Group for the psychology of Mathematics Education*, *2*, Taipei, Taiwan, 3-10.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes, 147-176.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education 59* (5), 389-407.

Crespo, C. R. y Farfán, R. M. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 287-317.

Juárez, J. A., Hernández, L. A., y Slisko, J. (2014). Aceptando la existencia de un terreno inexistente en un problema matemático: el uso prevalente de argumentos pragmáticos por docentes de primaria, en *Avances de Investigación en Educación Matemática 1* (6).

Knipping, C. (2004). Argumentations in proving collecting in mathematics classrooms. En Törner, G. et al. (Eds.). *Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries*. Selected papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, 73-84.

León, O. L. y Calderón, D. I. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(1), 5-21.

Monzón, L. A. (2011). Argumentación: objeto olvidado para la investigación en México. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *13*, (2), 41-54. Recuperado el 16 de agosto de 2013 de http://redie.uabc.mx/vol13no2/contenido-monzon.html

Secretaría de Educación Pública (2011). *Matemáticas Quinto Grado*. México: SEP.

Tapan, M. S. & Arslan, C. (2009). Preservice teachers' use of spatio-visual elements and their level of justification dealing with a geometrical construction problem. *US-China Education Review*, *6* (3), 54-60.

Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Tareas pertinentes para la activación de zonas neuronales implicadas en procedimientos

Ma. Herlinda C. Martínez de la Mora[12]

Alguna de las áreas cerebrales que se activan al procesar tareas matemáticas son las que están asociadas a la atención, éstas tienen una particular participación durante el desempeño de actividades procedimentales, sobre todo en los primeros años infantiles. Es ampliamente conocido que los tiempos de atención de niños preescolares es bastante limitado, éste es uno de los derroteros iniciales, aumentar los tiempos de concentración de los pequeños, así, proponer tareas que demanden procedimientos con materiales manipulables es pertinente para mantener la atención concentrada en la tarea, y prolongar, cada vez, los tiempos de atención. En ello, también está implicado otro tópico, éste es la necesidad de logro del estudiante. En esta dirección, el taller de la maestra Verónica García, "Redescubriendo el número", es adecuado; una versión simplificada se ha utilizado en preescolar con muy buenos resultados.

Introducción

Durante las décadas pasadas se impulsó la idea de propiciar aprendizajes mediante la reflexión y la disposición crítica, en oposición a los aprendizajes mecánicos e imitativos. Esta última característica, vista como un aprendizaje que implicaba un cierto contenido nocivo para el desarrollo posterior del estudiante. Sería conveniente poner en perspectiva esta idea,

[12] Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), México. Correo-e: hmartinez@cinvestav.mx

dado que en la historia de la educación podemos encontrar las cuestiones procedimentales subsumidas en las técnicas que replicaba el discípulo cuando observaba a un maestro de las artes u oficios. Platón había descrito precisamente esta forma de educarse; observar por periodos prolongados antes de comenzar a replicar la técnica usada por el maestro (Alighiero, 1987). Ahí la norma para poder aplicar ciertas competencias era "observar e imitar". La función de la relación entre maestro y discípulo era la de transmitir conocimiento procedimental efectuado por imitación. Por supuesto, son susceptibles de ser imitados ciertos procedimientos que se presentan a la mirada del aprendiz. Sin embargo, esta formulación de observar e imitar, comenzó a ponerse en la mira de los cuestionamientos cuando surgieron las corporaciones de artes y oficios, que por el tipo de exigencias de las sociedades de entonces, requerían de una preparación del aprendiz que se observaban más cercanas a la formación escolástica (Alighiero, 1987). Precisamente porque los conocimientos, como el matemático, requieren innegables aplicaciones procedimentales, pero estos no pueden ser aprendidos únicamente por imitación. Ni pueden expresarse solamente como competencia.

El aprendizaje procedimental

La nota que caracteriza el aprendizaje procedimental es la repetición sistemática de una actividad, o la frecuente realización de una tarea cuyo desempeño dependerá de los distintos grados de dominio hasta que se alcance su automatización. Cuando se alude a esta característica de automatización es necesario también traer a cuenta consideraciones neuronales involucradas en este fenómeno tales como; la creación del entramado neuronal, es decir, de la conectividad, el "mecanismo" inhibitorio y la participación de las glías en la constante generación de materia blanca, la mielina, (Tapia, 2010) que es la que asegurará un dominio expedito en una tarea. Es necesario considerar este comportamiento neuronal, ya que el aprendizaje es desencadenante de conectividad entre neuronas, pero también la reiteración en una tarea es determinante para el grado de mielinización de tales conexiones, a mayor mielinización más rápido recorre la señal eléctrica. Es decir, cuando hay dominio en una habilidad o destreza, muchas veces aludido como automatización, es porque se ha logrado generar la red suficientemente mielinizada

Neurociencias y las estrategias procedimentales

En la última década las investigaciones de neurociencias, en relación a los aprendizajes procedimentales, han cobrado relevancia paulatinamente, en este ámbito, la psicología cognitiva ha influido en la perspectiva para la determinación de los aspectos a investigar. Así, frecuentemente encontramos nociones como memoria de trabajo, planificación, monitoreo, entre otras. Seguir ciertos procedimientos necesariamente requiere de la atención y el control, lo cual impacta en la memoria a largo plazo. Se puede ver que todos estos aspectos se ubican dentro del marco de las llamadas funciones ejecutivas. Esbozadas por Luria como regulación y verificación de conductas complejas (Luria, 1977 citado por García y González, 2014, p. 54). Tanto las investigaciones que se centran en los procedimientos, como las investigaciones referentes a las funciones ejecutivas, registran la activación del lóbulo frontal y prefrontal.

Aunado a ello, numerosas investigaciones han registrado cambios en la materia gris y blanca en el cerebro como efecto del aprendizaje. Así, los cambios en la estructura cerebral obedecen por un lado al efecto de las experiencias cotidianas de un sujeto y al entorno en el que se desenvuelven. Pero a diferencia de este tipo de impactos el aprendizaje procedimental se distingue por la repetición sistemática de una actividad, como por ejemplo el logro de ciertas habilidades motoras para algún deporte en particular, o la práctica de un arte o de un oficio. Varios de ellos necesitan acceder a secuencias procedimentales complejas (Draganski, Gaser, Busch, Schuierer, Bogdahn & May, 2004).

Mientras algunos investigadores afirman que la activación de los lóbulos frontales y parietales es una cuestión madurativa, (Serra-Grabulosa, Pérez-Pámies, Lachica y Membrives, 2010), otros reconocen en las distintas activaciones, cuestiones que atañen a otras oposiciones, como por ejemplo, distinguir el conocimiento procedural del conocimiento declarativo, (como veremos más adelante) o bien reconocer en las diferentes activaciones estrategias procedurales versus estrategias de recuperación, por ejemplo, para el tratamiento de operaciones aritméticas.

> Consistente con la noción respecto a que las estrategias procedurales requieren mayor esfuerzo que los datos de recuperación, nosotros encontramos que los problemas procedurales (comparado con recuperación) emplean una extensa

> red de la corteza frontal y parietal, así como la ganglia basal [...] a la luz de los datos presentes podría especularse que los cambios dinámicos de activación registro-edad, reflejan una modificación de las estrategias procedurales hacia un uso predominante de datos de recuperación los cuales parecen ser mediados por regiones de la corteza temporo-parietal (Grabner, Ansari, Koschutnig, Reishofer, Ebner & Neuper, 2008).

En el mismo artículo los autores sostienen que los datos de recuperación están asociados a una mayor activación de la circunvolución angular izquierda IAG. Esta última información es destacable porque muchas investigaciones registran esta activación durante el desempeño de tareas aritméticas.

La didáctica general y el tópico de los procedimientos

En la didáctica general se ha ubicado el tema de los procedimientos dentro de la fase dedicada a integrar y fijar conocimientos. Así lo expresa Mattos, "El repaso periódico, la revisión sistemática, los ejercicios repetidos, refuerzan y consolidan el aprendizaje y contribuyen a la deseada integración y fijación de los conocimientos y de las habilidades específicas" (Mattos, 1974).

De entonces a la fecha, en el ámbito educativo hay varios acercamientos a esta temática, así lo refieren Haapasalo y Kadijevich quienes hacen una síntesis oportuna para observar las aproximaciones sustancialmente diferentes mediante las cuales se ha tratado el asunto procedimental, en particular para el conocimiento matemático.

Los autores distinguen entre conocimiento conceptual y conocimiento procedural, con dicha distinción organizan diferentes perspectivas que analizan esta dicotomía. Así, sintetizan los variados puntos de vista: los que proponen que no hay relación entre estos conocimientos, otros más, exponen que el conocimiento procedimental es una condición necesaria y suficiente para el conocimiento conceptual. Mientras otras aproximaciones proponen justo lo contrario, algunas de ellas dicen que el conocimiento conceptual es necesario pero no suficiente condición para el procedimental, otras expresan que el procedimental es necesario pero no suficiente condición para el conocimiento conceptual (Haapasalo y Kadijevich, 2000). Nuestra aproximación no discurre en esta dicotomía, la reseñamos porque es parte de cómo se ha abordado este tipo de conocimiento en fechas recientes.

La perspectiva que nosotros proponemos es un acercamiento pedagógico, didáctico específicamente, pues vamos a poner en la mesa de análisis dos puntos cardinales durante los aprendizajes y los concertaremos con el asunto procedimental. El primero es el tópico de generar que los alumnos muestren periodos de concentración cada vez más prolongados. Los docentes saben, que esto no es un asunto de persuadir al estudiante, más bien es proveer el método adecuado para mantener la atención y la concentración, por periodos cada vez mayores, o al menos plantearlos en la ruta ascendente. Y la otra cuestión es relativa a la necesidad de logro, profundamente imbricada en los conocimientos matemáticos, pues una continua falla en este dominio termina por desanimar el emprendimiento de nuevas tareas matemáticas. Nérici lo explicita como un principio didáctico al que denomina principio de dificultad:

> Colocar al educando en situaciones problemáticas y cuya solución exija esfuerzo […] es preciso tener cuidado de no colocar al educando ante situaciones de las que no tenga posibilidades de salir bien, pues el fracaso continuado es el peor veneno para la criatura humana, principalmente en su fase de formación (Nérici, 1969, p. 358).

El taller de la maestra Verónica García presenta condiciones pertinentes para generar los dos tópicos que hemos propuesto como básicos para lograr sólidos aprendizajes matemáticos en los estudiantes, el taller concierne propiamente al aprendizaje numérico, precisamente porque dedicarse al aprendizaje del número —entendido como contenido cardinal del pensamiento— dará soporte al dominio matemático.

Una experiencia efectuada durante el último grado del Jardín de Niños, en el que se aplicó una versión simplificada del taller "Redescubriendo el número" muestra la pertinencia de éste, para conseguir los dos tópicos que hemos expresado; ya que, los pequeños estudiantes logran fabricar números con diferentes bases, y los tiempos de concentración que ello implica son prolongados. Cabe indicar que la maestra Verónica García, con una versión completa del taller lo ha aplicado en la escolaridad primaria. A continuación referimos dicho taller para "fabricar números" con distintas bases.

Taller de la maestra Verónica García P.: "Redescubriendo el número"

Para iniciar, al igual que lo realiza la maestra, procederemos presentando el material que utiliza para "fabricar" números, continuaremos con una breve descripción de los procedimientos que sigue durante una sesión. Exhibe primero un espacio plano dividido en tres columnas, éste es parecido a un mantel individual de mesa, al cual llama máquina para fabricar números.

Cabe señalar que en lo sucesivo se hará referencia a éste como espacio operativo. Después muestra una caja que contiene palitos a la que denomina banco de unidades, enseguida ostenta una caja con ligas de dos tamaños distintos, a la caja la designa como banco de potencias, a la liga de menor tamaño la nombra como potencia uno y a la de mayor tamaño potencia dos.

Al material empleado se añade un dado. Una vez presentado el material hace referencia a un número mágico, este es el número que indica la base, comienza con el número más grande que puede salir cuando se lanza un dado. El número mágico entonces es el número seis por una razón práctica, es el número más grande en un dado. Este es la base con la cual se comienza a "fabricar el número". Niños de primer grado comienzan a conocer el número mediante la base seis, no la diez como nos es familiar. Cabe señalar que los alumnos al iniciar con la fábrica de números ya cuentan del uno al nueve y lo asocian al signo indo-arábigo.

La maestra menciona dos condiciones para el empleo del espacio operativo; uno es que la máquina puede "explotar" si iguala o rebaza la cantidad seis para cada columna —por ello es que marca al seis como mágico, para resaltar su peculiaridad de base— sea unidad o agrupación, y la otra condición es, si al alumno que lanza el dado le sale el número mágico, seis, entonces le toca volver a tirar el dado.

Con ello, la maestra indica una regla elemental para el empleo de las distintas órdenes de magnitud, a saber: base menos uno, b - 1 para ubicar en cada columna y distingue el número base como mágico, con lo cual resalta la singularidad de este número —como ya lo expresamos— con todo ello, se van a realizar operatividades diferenciadas. Es necesario mencionar también que a los palitos los designa como unidad o potencia cero; al nombrarlos así, ello se coordina con el espacio operativo, —en el siguiente sentido— una unidad es ya número, y tiene una columna específica para situar las unidades simples.

La maestra entonces anota un número en el pizarrón, por ejemplo; 153_6 y les indica a los niños: "ahora vamos a fabricar este número". Para ello, los niños lanzan el dado por turnos (comparten una mesa entre cuatro alumnos). Cuando un niño lanza el dado, el número que sale es el número de unidades (palitos) que colocará en la columna de las unidades. Continúan lanzando el dado hasta que logran reunir una agrupación de seis, lo atan con la liga pequeña y colocan esta nueva unidad compuesta de seis en la siguiente columna a la izquierda de las unidades. Se prosigue de la misma manera colocando unidades, y reuniéndolas cuando unen otra unidad de seis.

Cuando en la columna de la potencia uno ha reunido cinco unidades compuestas y el niño coloca una unidad compuesta más, se le llama la atención diciendo que su máquina va a explotar. Para evitarlo el niño necesita hacer una agrupación mayor con las seis agrupaciones existentes, las acomoda entonces en una nueva unidad, que se ata con la liga más grande y se coloca en la columna de la potencia dos. Así, el alumno va conformando su propio entendimiento del valor de posición.

La maestra utiliza la misma secuencia didáctica, para introducir otras bases, le dedica aproximadamente un mes para el transcurso de la ejercitación con cada base, en los primeros grados usa como base las cifras indo-arábigas, introduce bases mayores en 6° de primaria. En seguida presentamos un esquema del espacio operativo, con un ejemplo: el número 35 en base seis.

Tabla 1: "Fábrica de números", ejemplo del número 35 base seis

	~~IIIII~~I ~~IIIII~~I ~~IIIII~~I	I I I I I

Al final del taller se observa que los niños al ver un signo arábigo, ya no ven solamente una cantidad, a estos niños si se les preguntara ¿qué número representa 325?, seguramente preguntarán también: ¿en qué base? para dar su respuesta. Se genera, con este taller, una coordinación operativa con la cual se completa un número. Tal orquestación de operaciones está configurada en principio por la adición, multiplicación y potenciación.

Una habilitación inicial con materiales promueve conexiones básicas al coordinar material, signo y espacio. Posteriormente se prescinde del material y se prosigue con la habilitación signada. Es importante reconocer que es fundamental el empleo que se efectúa con el material coordinándolo con el signo y el espacio estructurado a la vista.

Como se describió, la maestra Verónica García emplea su taller en la escuela primaria. Aquí registramos la aplicación de una parte del taller, del cual se aplicó la sección inicial en tercer grado del jardín de niños Tohui (ubicado en la Col. Mixcoac, México, D. F., Del. Benito Juárez), a cargo de la directora, Micaela Lezama Ruiz, y de la maestra, Alejandra Trejo Rojo.

Una versión del taller "Fabrica de números" aplicado en Jardín de Niños

La edad de los niños es alrededor de cinco años de edad. El grupo estuvo integrado por seis niños y niñas. Las sesiones fueron una vez a la semana, los miércoles, con una duración que osciló entre 1 y 1:30 horas. La aplicación la realizó la maestra del grupo. Al comienzo del curso escolar utilizó la base seis, esta base se usó en las sesiones siguientes durante dos meses; porque ella requirió comenzar desde el conteo, y proseguir con el reconocimiento de números.

Señalamos tres particularidades que perfilan la sección inicial; la primera particularidad es en relación al empleo de números para "fabricarlos", estos son siempre más pequeños que su base, así el énfasis se coloca en la conformación de agrupaciones y agrupación de agrupaciones, o potencia dos. La segunda, el cambiar de bases, en la que se utilizó una base diferente en cada sesión, (después del periodo dedicado al principio del curso escolar a la base seis) y la tercera es que ahí se destaca la coordinación de materiales y el signo con el espacio operativo.

Si bien el énfasis se puede observar en la operación multiplicativa y la potencia, también se observan algunas particularidades al emplear el dado que genera operatividad distributiva, por ejemplo; cuando la base es menor a seis y el número que sale en el dado al lanzarlo es seis, el niño no puede colocar directamente en una columna la agrupación de seis, requiere distribuir las unidades dependiendo de las bases, para formar una agrupación y dejar el resto en el orden de magnitud cero. Otro caso es cuando a las unidades presentes en la primer columna se añaden las unidades que surgen al lanzar el dado. El alumno necesita reunir la agrupación definida por la base para colocarla en el orden de magnitud correspondiente.

Observamos la última sesión del curso escolar para registrar el desempeño de los niños durante el procedimiento para formar el número solicitado, después de que durante todo el curso aplicaron la sección inicial del taller "Redescubriendo el número". Cabe señalar que la sección inicial, no es una parte que conforme el propio taller, lo que hemos llamado aquí sección inicial es una adaptación del taller para este grupo de población y recuperamos del taller, sobre todo, los procedimientos iniciales, de allí la denominación.

En la última sesión se van a formar dos números; 111, en base 8 y después el mismo número con otra base, ésta es doce. Entonces la maestra anota el número en el pizarrón (siempre de tres órdenes de magnitud), e indica la base, los niños comienzan a lanzar el dado para "fabricar" el número en base ocho, —para formar el número en base doce utilizarán dos dados— Y comienzan a colocar en la primera columna la cantidad de unidades (palitos) que obtienen al tirar el dado por turnos.

Conocen las reglas al alcanzar a reunir ocho unidades, enseguida las agrupan con la liga llamada potencia uno, y la colocan en la columna correspondiente, así continúan, lanzando el dado, añadiendo en su espacio operativo la cantidad que sale al lanzar el dado, y van formando otras agrupaciones de ocho, poniéndolas siempre en el lugar que ocupan la potencia uno, hasta lograr reunir ocho agrupaciones, entonces dicen que ya formaron una "transformación" (llaman así a la agrupación de agrupaciones, en este caso una agrupación de 8 x 8) y la colocan en la columna de la potencia dos.

Continúan lanzando el dado para formar las unidades solicitadas —el número escrito en el pizarrón— para la potencia uno y también para la potencia cero. Generalmente forman un número por sesión, en esta ocasión, por ser el último día, hicieron dos números con distinta base. Después del primer número la maestra les preguntó con qué base querían hacer el siguiente número, un niño propuso base doce y los demás estuvieron de acuerdo.

Comenzaron a fabricarlo, esta vez lanzaban dos dados, se observaron diferencias, el conteo de cada punto del dado es una práctica de varios niños, pero lo destacable aquí es que aunque necesitaban hacer el conteo de los puntos de los dados uno por uno, los niños eran capaces de atender a las reglas puestas en juego para formar el número, estas son; la regla de aumento para cada orden de magnitud (de los tres órdenes de magnitud requeridos), reunir agrupación y agrupación de agrupaciones, todo ello coordinado con la aplicación de b-1, es decir, solamente puede haber tantas unidades por columna hasta la base menos uno.

Discusión

Planteamos que las técnicas de aprendizaje que incluyen procedimientos específicos no necesariamente deben articularse a la idea de aprendizaje "mecánico", se requiere revalorar las cuestiones procedimentales. En la actualidad los datos novedosos que han aportado las neurociencias permiten modificar la forma en que valoramos el aprendizaje procedimental y el aprendizaje que se ha enunciado como mecánico.

Las tareas procedimentales impactan el entramado neuronal que influye (o quizás determina) el tránsito o coordinación de activaciones del lóbulo frontal y prefrontal con las activaciones conectadas entre el lóbulo parietal y el GA. Proponemos que el aprendizaje mecánico de repeticiones algorítmicas puede generarse por la reiteración de una tarea que demanda una red neuronal escasa, es decir, una conectividad mínima intra-IPS en asociación simple con el IGA.

Sugerimos que el hecho de desplazar el punto de vista desde el cual valorar los procedimientos que participan del conocimiento matemático, es un ejercicio pertinente para analizar aspectos involucrados en esta materia. Ya que, colocamos en primer plano la conexión entre la actividad procedimental y el tópico de mantener la atención por largos periodos, así como, atender a la necesidad de logro infantil. De esta forma, el taller "Redescubriendo el número" resulta ser completamente pertinente para abordar el número.

Es posible con este taller conducir a los niños a tener éxito en la tarea de "fabricar números", con lo cual se satisface la necesidad de logro de los pequeños y genera una disposición pertinente para los contenidos matemáticos. El grupo al cual aludimos en este artículo es de niños de cinco años aproximadamente, y esta operatividad es asequible a esta población con el taller que se ha descrito. Cabe resaltar que se introduce también un aspecto de la divisibilidad.

Con respecto a los tiempos de concentración, el taller "Redescubriendo el número"; por el tipo de materiales que utiliza, el ritmo que impone la maestra, y las demandas cognitivas positivamente articuladas a tener las manos ocupadas en la tarea de contar las unidades (palitos) y el lanzamiento del dado y su subsecuente conteo de puntos, propicia que los alumnos se concentren por largos periodos sin inconvenientes.

Hoy sabemos que las conexiones neuronales se provocan por el aprendizaje, también sabemos que la reiteración en una actividad propicia mielinizaciones. Si una red neuronal está mielinizada suficientemente se activará ésta preferentemente cuando un sujeto se enfrente a una tarea que demande esa activación. Ello es un arma de doble filo ya que al lograr cierto dominio éste implica la automatización, es decir, una red neuronal suficientemente mielinizada para provocar una activación expedita, pero por otro lado puede ser que esa red neuronal resulte un impedimento para generar nuevas conexiones neuronales. Tal es el caso de enseñar y aprender el número únicamente mediante casos particulares; como cantidades y sujetos a la base diez.

Un aspecto a destacar es que al emplear diferentes bases es factible efectuar al menos dos expresiones diferentes de la misma entidad numérica. Lo cual podría pasar como una información más. Sin embargo, ello es fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, ya que esa posibilidad de plantear expresiones distintas, para una misma entidad, será utilizada en la solución de ecuaciones.

También es relevante señalar que con el empleo de distintas bases se integran herramientas analíticas necesarias para el pensamiento matemático. Específicamente, este taller propicia operatividad estructurada en oposición a la resolución de algoritmos que retoman las reglas sintácticas de la operación, pero se desatiende la estructura operativa.

Conclusiones

- Las condiciones necesarias para generar aprendizajes a través de experiencias de éxito y que también provean la situación pertinente para aumentar tiempos de atención y concentración se pueden efectuar mediante actividades de tipo procedimental.
- Las técnicas de aprendizaje que incluyen procedimientos específicos no están sujetos necesariamente a la idea de aprendizaje "mecánico" es necesario, en este asunto, revalorar las cuestiones procedimentales, ya que ellas impactan el entramado neuronal que influye (o quizás determina)

el tránsito o coordinación de activaciones del lóbulo frontal y prefrontal a las activaciones conectadas entre el lóbulo parietal y el IGA.

- Es una posible explicación que las investigaciones que registran una activación preferente del IGA y las áreas del lenguaje al procesar tareas aritméticas se deba al tipo de ejercitaciones efectuadas, en las cuales la conexión con el IPS es elemental, sujeta a una cantidad y a una sola base.
- Se puede proponer también que la mecanización algorítmica desprovista de una adecuada semántica se deba a la activación localizada en el IGA cuya conectividad elemental con el IPS provoca una mínima demanda.
- Sugerimos que el taller de la maestra Verónica García, "Reconstruyendo el número", es propicio y apropiado para generar activaciones de las áreas neuronales correspondientes a los procedimientos. Además, es muy destacable que el taller permite la coordinación de los procedimientos con el signo indo-arábigo que, en el ámbito neuronal, provoca diversidad de conexiones.
- El emplear distintas bases a la edad de cinco años, es posible y pertinente. La operatividad coordinada con la estructura es necesaria para dar contenido flexible al número, ya que, como mencionamos, esa posibilidad de plantear expresiones distintas para una misma entidad, será utilizada en la solución de ecuaciones.

Referencias Bibliográficas

Alighiero, M. (1987), *Historia de la educación 1, de la antigüedad al 1500,* México: Siglo XXI.

Draganski, B., Gaser, Ch., Busch, V., Schuierer, G., Bogdahn, U. & May, A. (2004). Changes in grey matter induced by training, *Nature, 427,* [versión electrónica]. Recuperado de http://www.nature.com/nature

García, V. (2011). Taller "Redescubriendo el número", CINVESNIÑOS-2011.

García, R. & González; V. (2014). Las funciones psíquicas superiores, la corteza cerebral y la cultura. Reflexiones a partir del pensamiento de A. R. Luria. En *Claves del pensamiento*, año VIII, núm. 15, enero-junio, 39-62. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Campus Ciudad de México.

Grabner, R., Ansari, D., Koschutnig, K., Reishofer, G., Ebner, F. & Neuper, Ch. (2009) To retrieve or to calculate? Left angular gyrus mediates the retrieval of arithmetic facts during problem solving. *Neuropsychologia 47*, 604-608. Elsevier. [DOI: 10.1016/j. neuropsychologia.2008.10.013].

Haapasalo, L. & Kadijevich, D. (2003). Simultaneous activation of conceptual and procedural mathematical knowledge by means of ClassPad [versión electrónica]. Recuperado de https://edutice.archives-ouvertes.fr

Mattos, L. (1974). *Compendio de didáctica general*, Argentina, Kapelusz.

Nérici, I. (1969). *Hacia una didáctica general dinámica*, Colombia, Kapelusz.

Serra-Grabulosa, J. M., Pérez-Pámies, Adán, Lachica, J., y Membrives, S. (2010). "Bases neuronales del procesamiento numérico y del cálculo", en *Revista de Neurología, 50* (1), 39-46.

Tapia, R. (2010). *Las células de la mente,* Col. Ciencia para todos, Sección Biología (30), México: FCE, SEP, Conacyt.

Induciendo consideraciones realistas de la solución del problema "tendedero entre dos postes", en estudiantes de secundaria: resultados iniciales y la influencia del nivel de razonamiento lógico

Irene María Herrera Zamora, Josip Slisko Ignjatov
y José Antonio Juárez López[13]

Resumen

El estudio se ha realizado con tres grupos de estudiantes que cursaban el tercero de secundaria. Se les aplicó previamente una Prueba de Razonamiento Lógico y luego se les suministró el problema "Tendedero entre dos postes" para su resolución. El problema se refiere a un contexto real: ¿Cuántas cuerdas de 1.5 m se necesitan para hacer un tendedero entre dos postes, a una distancia de 12 m? Los estudiantes tenían que encontrar y argumentar la solución y, luego, dibujar la situación correspondiente a la solución. Es conocido que la gran mayoría de los estudiantes resuelven el problema con una sola operación, sin tomar en cuenta las acciones necesarias para brindar una respuesta aceptable. Las preguntas de investigación fueron: ¿Es posible inducir en el desempeño de los estudiantes las consideraciones realistas de la solución de un problema verbal? ¿Depende exclusivamente del nivel de razonamiento lógico la inclinación hacia consideraciones realistas durante la solución de un problema verbal? Los resultados de este micro-estudio de intervención sugieren que la respuesta inicial a la primera pregunta es positiva y a la segunda es negativa.

[13] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), México. Correo-e: Irene Ma. Herrera: imherreraza@gmail.com / correo-e: Josip Slisko: josipslisko47@gmail.com / José Antonio Juárez, correo-e: loupemy04@yahoo.com.mx

Palabras clave

Resolución de problemas verbales realistas, modelo situacional, experimentador inmerso, sesgos cognitivos, contrato didáctico.

Introducción

En la escuela los alumnos se enfrentan a menudo con problemas verbales. Estos problemas les permiten adiestrarse para pensar creativamente, los motiva y ayuda a desarrollar nuevos conceptos y habilidades matemáticas. Sobre todo para ofrecer práctica para situaciones de la vida cotidiana en las que necesitarán hacer uso de lo que han aprendido en la escuela (Dewolf, Van Dooren, Hermens, & Verschaffel, 2015). Un alumno en su trayectoria escolar tendría que enfrentarse a diferentes tareas matemáticas para poder resolver problemas. Vicente y Orrantia (2007), clasifican los problemas en: problemas verbales realistas, problemas algebraicos y problemas aritméticos. Los problemas verbales realistas reproducen fielmente situaciones del mundo real, mientras los problemas aritméticos se resuelven mediante la aplicación de operaciones aritméticas básicas. Como parte de la solución de un problema verbal realista se deben considerar elementos relevantes, las relaciones y las condiciones incluidas en la situación de trabajo a través del modelo matemático, para obtener posibles resultados matemáticos e interpretarlos en relación con la situación problemática original, y para determinar si es razonable dentro del contexto real (Dewolf et al., 2015).

En su reciente estudio *The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically*, Dewolf, T., Van Dooren, W., Ev Cimen, E. & Verschaffel, L. (2014) han explorado el impacto de ilustraciones y advertencias en las inclinaciones de los estudiantes en Turquía (N = 402) y Bélgica (N=232) hacia el uso de consideraciones realistas en la soluciones de los problemas en un contexto real. Las edades de los estudiantes eran entre 10 y 11 años (quinto grado de primaria en Turquía y Bélgica).

En los casos en que esperaban el mayor efecto positivo, acompañaron los problemas con ilustraciones figurativas que representaban la situación problemática descrita en el enunciado y con advertencias sobre el carácter “problemático” del problema. La hipótesis era que estas ilustraciones y advertencias ayudaran a los alumnos para que se imaginaran mentalmente la situación y resolvieran los problemas de forma más realista. Sin embargo, al igual que en otros estudios, realizados por diferentes investigadores con diversas intervenciones, dirigidas hacia la inducción de consideraciones realistas en los estudiantes, se encontró que los alumnos en general no utilizaron sus conocimientos cotidianos para resolver este tipo de problemas, y tampoco utilizaron las ilustraciones y las advertencias como ayuda para resolver los problemas propuestos y dar una respuesta realista a los problemas. En un estudio de seguimiento, diseñado para comprender tal hecho, se ha encontrado que los estudiantes prestaban muy poca atención a las ilustraciones (Dewolf et al., 2015).

En los problemas propuestos los estudiantes debían considerar algunos aspectos sutiles de la situación descrita. Veamos un ejemplo:

> Un hombre quiere hacer una cuerda suficientemente larga para estirar entre dos postes que se hallan a 12 m de distancia entre sí, pero sólo tiene trozos de cuerda de 1.5 m de largo cada uno. ¿Cuántas de estas piezas necesita atar juntas para estirar entre los postes?’

La solución no se halla simplemente dividiendo 12 m por 1.5 m, porque uno debe tener en cuenta que las piezas de la cuerda necesitan ser anudadas entre sí, y que se necesita cuerda para encajar alrededor de los postes. Por lo tanto, se necesitan más de ocho piezas.

Las respuestas en el estudio (Dewolf et al., 2014) fueron clasificadas como realistas (RR) o no realistas (NRS), en función de los argumentos dados a su respuesta. Las soluciones no-realistas correspondían, generalmente, al resultado numérico de una ejecución sencilla de la operación con los números dados en el problema, sin ningún tipo de comentario sobre la naturaleza del mismo desde una perspectiva de modelado realista. Las reacciones realistas (RR) fueron las respuestas que tuvieron en cuenta las consideraciones realistas, dando una respuesta realista. Para el problema de las cuerdas, por ejemplo, la respuesta directa “12 / 1.5 = 8 cuerdas” sin ninguna referencia a los “nudos” era considerada como NR, mientras que la respuesta “se necesitan más de 8 cuerdas”, o la respuesta de que “es imposible dar una respuesta numérica precisa” eran consideradas como RR. El resultado decepcionante es que la gran mayoría de los alumnos incluyeron muy poco conocimiento del mundo real, sin importar mucho la presencia o ausencia de la ilustración o de la advertencia correspondiente.

Los porcentajes de respuestas realistas para el problema de las cuerdas y los postes, con diferentes presencias de ilustraciones y advertencias, están dados en la tabla 1.

Tabla 1. Porcentajes de respuestas realistas

País	Ilustración (+) Advertencia (+)	Ilustración (+) Advertencia (-)	Ilustración (-) Advertencia (+)	Ilustración (-) Advertencia (-)	Total
Turquía	1.0	0.0	0.9	0.0	0.5
Bélgica	5.4	1.8	1.7	0.0	2.1

La presente investigación tiene como punto de partida el trabajo de Dewolf et al. (2014), de donde se tomaron dos problemas y se adaptaron al contexto escolar estudiado. Para efectos de este estudio, sólo se presentan los resultados obtenidos para el problema del tendedero, referido anteriormente. Sin embargo, se aclara que, a diferencia del estudio de Dewolf, la realización de las ilustraciones fue solicitada a los estudiantes como parte de la respuesta. Además, los estudiantes debían explicar la respuesta obtenida en cada problema. Por otra parte, cada estudiante realizó previamente el test de razonamiento lógico (Test of Logical Thinking, TOLT) en su versión española (Acevedo y Oliva, 1995). Todo esto, con el fin de dar respuesta a dos preguntas de investigación:

- ¿Es posible inducir en el desempeño de los estudiantes las consideraciones realistas de la solución a un problema verbal?
- ¿Depende exclusivamente del nivel del razonamiento lógico la inclinación hacia el aporte de consideraciones realistas en sus argumentos de la solución a un problema verbal realista?

Previo a esta investigación, fueron aplicados ambos problemas a doce estudiantes con alto rendimiento en matemáticas, en otra institución. En el problema del tendedero, los argumentos dados para la justificación de las respuestas, en once de los estudiantes, se basaron en la descripción de las operaciones realizadas, sin tomar en cuenta aspectos realistas asociados a la forma en que se podría elaborar el tendedero. De tal modo, la respuesta general para el problema del tendedero fue "8 cuerdas", sin considerar las condiciones reales del contexto. Sólo un estudiante mencionó la necesidad de tener "más cuerda" para realizar la unión de las cuerdas. Al cuestionarlos por esta respuesta "no realista", varios de los estudiantes manifestaron que suponían que la respuesta esperada por el profesor debía ser la obtenida mediante el cálculo aritmético y, por tanto, no se atrevieron a dar otro resultado. Este comportamiento de los estudiantes puede estar influido en lo que Brousseau (1997) denomina "contrato didáctico".

Por esta razón, el presente estudio trata de responder las anteriores interrogantes mediante la aplicación de dos diferentes tratamientos simples (en forma y duración), que buscan disminuir la tendencia a dar respuestas de acuerdo con el "contrato didáctico", omitiendo consideraciones realistas. Debido a su duración breve (una sola sesión), se trata de una micro-investigación de intervención pedagógica cuyo fin es explorar efectos de dos diferentes complementos a la formulación del problema en cuestión (Ticha y Hospesova, 2006).

El primer tratamiento consiste en una breve "discusión previa" sobre la necesidad de razonar acerca de la respuesta con respecto a la situación real abordada en un problema y trata de disminuir el efecto del "contrato didáctico" en las explicaciones de los estudiantes e inducir una inclinación hacia consideraciones realistas.

El segundo tratamiento tenía como intención que los estudiantes se consideraran a sí mismos como "experimentadores inmersos" (Zwaan, 2004) al resolver el problema, considerando que eso puede aumentar la activación de la actitud de tomar en cuenta las experiencias del mundo real.

En los tres grupos ("discusión previa", "experimentadores inmersos", sin intervención alguna es el grupo de "control") se tenía la posibilidad de observar si la elaboración de las ilustraciones, como modelo situacional (Juárez, Mejía, González y Slisko, 2014), influía en las respuestas y sus justificaciones escritas.

Marco teórico

La resolución de problemas matemáticos escolares y el mundo real

En la introducción de su libro *Making sense of word problems*, Verschaffel, Greer y De Corte (2000) definen los problemas verbales como "descripciones textuales de las situaciones asumidas para ser comprensibles para el lector, en el que cuestiones matemáticas pueden ser contextualizadas". También señalan que los problemas verbales "proporcionan, en forma conveniente, una posible relación entre las abstracciones de las matemáticas puras y sus aplicaciones a los fenómenos del mundo real". El principal objetivo de la comprensión del lenguaje es la construcción de una representación mental de la situación referencial, es decir, un modelo situacional (Zwaan, 2004). Por su parte, Borromeo-Ferri (2006) sostiene que el modelo situacional es una fase importante en el proceso de modelación debido a que en él se describe la transición entre la situación real y el modelo situacional como *una fase de comprensión de la tarea,* la cual requiere información derivada del conocimiento previo del lector. Sin embargo, es tarea docente guiar adecuadamente a los estudiantes para que activen competencias que les permitan resolver problemas considerando todos los posibles factores involucrados en su solución.

Al respecto, Schoenfeld, (1992) menciona que "no es sólo lo que usted sabe, es cómo, cuándo, y si usted lo usa". Esto revela la necesidad de ayudar a los estudiantes en el desarrollo de habilidades para enfrentarse eficazmente a la resolución de problemas matemáticos con una conciencia de la realidad en la que adquiere sentido.

Sin embargo, cuando los estudiantes se enfrentan a problemas verbales, que consideran similares a otros que han resuelto en la escuela, tienden a resolverlos dejando de lado si la respuesta obtenida es razonable o no dentro del contexto del problema. Esto puede deberse, en parte, a lo que Brousseau (1997) denomina "contrato didáctico", definido como el sistema de expectativas recíprocas entre el profesor y los alumnos, que guía las acciones de ambos. Por ello, los estudiantes tienden a dar, en muchas ocasiones, respuestas no realistas que reflejan fielmente el modo en que trabajan en la escuela. De tal forma, los estudiantes resuelven problemas verbales de acuerdo con lo que consideran que espera su profesor. Muchas veces realizan una operación que contenga los valores presentes en el enunciado del problema y dan un resultado sin cuestionar la validez del mismo dentro de un contexto real.

Por otra parte, cuando resolvemos un problema, según Kahneman (2011), se pueden activar dos sistemas. El llamado sistema 1, que utiliza nuestra intuición y procesos de pensamiento automático. El sistema 1 predice rápidamente respuestas, basado en modelos de situaciones familiares, "y sus reacciones iniciales a los desafíos son rápidos y generalmente acertados". El segundo de dos sistemas, el sistema 2, sólo entra en escena cuando identificamos una situación que requiera un laborioso trabajo cognitivo, como resolver un problema matemático realista. Aunque, si las suposiciones en que se basa el sistema 1 no son del todo correctas, y el problema que deben resolver es en apariencia sencillo, se inclinarán a dar como verdadera una respuesta no razonable con respecto a las condiciones del problema. Kahneman plantea como idea clave que "la gente tiende naturalmente hacia la facilidad utilizando cognitivamente la menor cantidad de energía necesaria para realizar una tarea cognitiva". De acuerdo con lo anterior, debido a que tendemos hacia la facilidad cognitiva, confiamos en los atajos necesarios para aligerar la carga de esfuerzo de pensamiento, nos apoyamos en la memoria asociativa, apoyados por lo que creemos, y no reinventamos nuestra forma de pensar con cada nuevo problema. Tendemos a confiar en normas aceptadas (lo que otros están haciendo o han hecho) y son susceptibles a muchas formas de engaño subconsciente. Entonces, el sistema 2, supuestamente crítico, acepta fácilmente lo que le sugiere el sistema 1, utilizando el lenguaje de la racionalidad para justificar lo que era simplemente una respuesta intuitiva.

Lo anterior nos conduce a la noción de "sesgos cognitivos", que se introdujo por Amos Tversky y Daniel Kahneman en 1972. Las limitaciones de nuestra memoria inmediata, la falta de información o la incertidumbre acerca de las consecuencias de nuestras acciones provocan que las personas recurramos de forma sistemática a atajos mentales, que utilizamos para simplificar la solución de problemas y que nos permiten realizar evaluaciones en función de datos incompletos y parciales (Kahneman, 2012). Se puede decir, entonces, según Kahneman, que "los sesgos cognitivos son caminos que abrevian o acortan la solución para evitar la 'carga de la memoria de trabajo'".

Metodología

El trabajo realizado corresponde con un estudio cualitativo, tipo "intervención didáctica" (Rojas et al., 2011), realizado con un problema verbal cuya solución requiere una consideración realista, tomado de la investigación de Dewolf et al. (2014). El problema fue traducido y adaptado a la población del estudio:

La distancia entre dos postes es de 12 metros. Vamos a hacer un tendedero de ropa para amarrarlo entre esos postes. Si tienes solamente cuerdas de

1.5 metros de largo, ¿cuántas cuerdas necesitas atar juntas para hacer el tendedero?

Esta versión mantiene la formulación original, con indicaciones previas generales, se llama “formato A” (ver más adelante, una descripción más detallada).

Los estudiantes tenían que argumentar la solución que dan al problema planteado. Adicionalmente, se les solicitó elaborar un modelo de la situación que mostrara los elementos relevantes del problema y su solución.

Participantes y procedimiento

Se cuenta con tres grupos de tercero de una secundaria técnica en Puebla, a los que se denominó como grupo de “discusión previa” (32 estudiantes), grupo de “experimentadores inmersos” (30 estudiantes) y grupo “control” (36 estudiantes). Los estudiantes tienen a una misma docente en la asignatura de matemáticas. Se procede a trabajar con cada grupo en dos fases aplicadas en diferentes momentos, tal como se describe a continuación.

Primera fase: Se aplicó la prueba de razonamiento lógico TOLT (versión en español), con el propósito de asignarles un puntaje de acuerdo con sus respuestas y justificaciones dadas al test. Se dividió cada grupo en dos subgrupos: los que obtuvieron puntaje mayor que dos, y los de puntaje menor o igual que dos.

Segunda fase: Se aplicó un instrumento con un problema verbal realista: “Tendedero entre dos postes” en dos diferentes modalidades.

Grupo de “discusión previa”: Antes de aplicar el instrumento, se comentó el siguiente problema: “El mejor tiempo de Juan en la carrera de los 100 metros, es de 17 segundos. ¿Cuánto tiempo tardará en realizar una carrera de un kilómetro?” Con base en este problema, se propicia la discusión con respecto a la posible respuesta numérica y el contexto real del corredor. De manera que surjan diferentes respuestas con razonamientos explícitos expresados verbalmente por los mismos estudiantes. Luego se aplicó el problema con “Formato A”.

Grupo de “experimentadores inmersos”: Este tratamiento se basa en el Marco del Experimentador Inmerso (MEI). Se aplicó el problema con “formato B”, en cuyas indicaciones generales, que vienen antes de la formulación del problema, se "sugiere" pensar en la situación real que representa e imaginar que se realiza lo que el problema propone.

Grupo control: Se aplicó el mismo instrumento que al grupo 1, "formato A", sin comentarios ni discusión previa.

Dado que la prueba TOLT y los instrumentos con los problemas fueron aplicados en momentos diferentes, se consideraron en los grupos sólo aquellos estudiantes que realizaron ambas pruebas.

Instrumentos para recopilar la información

Prueba de razonamiento lógico (TOLT)

Para obtener una puntuación en el razonamiento lógico de los estudiantes se ha utilizado el Test de Pensamiento Lógico (TOLT). Esta prueba de razonamiento formal, para contestar por escrito, consta de 10 ítems de opción múltiple en dos niveles, primero debe dar una respuesta a cada ítem y luego debe seleccionar la opción que mejor justifique la respuesta que ha elegido, en los primeros ocho ítems. En los últimos dos ítems, se evalúan los esquemas operatorios de combinatoria. La puntuación obtenida oscila entre 0 y 10. Como se ha mencionado anteriormente, se usó una versión en español validada por Acevedo y Oliva (1995).

Problema verbal realista

Se elaboraron dos instrumentos para presentar el problema. Su única diferencia radica en las indicaciones dadas en el encabezado:

Formato A: "Lee con atención el siguiente problema y realiza lo que se te solicita".

Formato B: "Lee con atención el siguiente problema y, al resolverlo, piensa en la situación real que representa. Imagina que realizas lo que el problema propone".

Luego, se plantea el problema y se solicitan tanto una respuesta escrita justificada, como la elaboración de un modelo situacional de lo descrito en el texto:

La distancia entre dos postes es de 12 metros. Vamos a hacer un tendedero de ropa para amarrarlo entre esos postes. Si tienes solamente cuerdas de 1.5 metros de largo, ¿cuántas cuerdas necesitas atar juntas para hacer el tendedero?

- Escribe la respuesta en el espacio correspondiente. Explica con argumentos el razonamiento que usaste para obtener tu respuesta. Para llegar a la respuesta, he razonado así:
- ¿Cómo te imaginas el tendedero? Realiza un dibujo que represente tu tendedero (debe contener todos los elementos que consideres importantes para explicar tu respuesta al problema)

Resultados obtenidos en la prueba de razonamiento lógico (TOLT)

Las medias aritméticas de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes fueron las siguientes:

- Grupo de "discusión previa": 1.81
- Grupo de "experimentadores inmersos": 1.93
- Grupo "control": 1.53

Las frecuencias de los puntajes obtenidos se resumen en la tabla 2.

Tabla 2. Puntaje obtenido por los estudiantes en el test de razonamiento lógico: TOLT

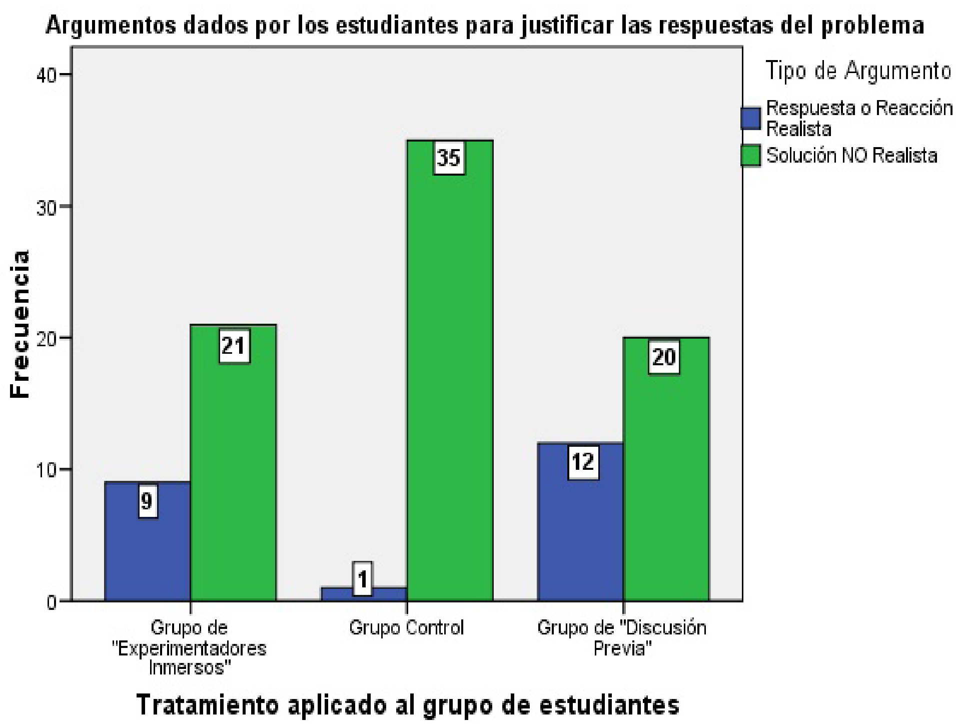
Recuento		Puntaje obtenido en el test de razonamiento lógico TOLT		
		[0,2]	[3,10]	Total
Tratamiento aplicado al grupo de estudiantes	Grupo de "investigadores inmersos"	21	9	30
	Grupo "control"	29	7	36
	Grupo de "discusión previa"	24	8	32
Total		74	24	98

En la tabla 2 se agrupan en dos intervalos la frecuencia de los puntajes obtenidos por los estudiantes en la prueba TOLT. Los intervalos son [0,2] y [3,10], considerando las medias aritméticas de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes. Puede observarse que el número de casos de estudiantes en el intervalo [3, 10] es bastante cercano en todos los grupos; así como la cantidad de puntajes en el intervalo [0, 2] en los tres grupos. De tal modo que, en general, el porcentaje de estudiantes por debajo de la media se ubica entre 70 % y 80 % de cada grupo.

Clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes al problema aplicado

De acuerdo con el tipo de elementos aportados en los argumentos (comentarios), se procedió a clasificar las respuestas de los estudiantes en respuesta o reacción realista (RR) y solución no realista (SNR). Entonces, con base en los argumentos dados por los estudiantes para justificar verbalmente sus respuestas, se presenta el gráfico 1:

Gráfico 1.



De acuerdo con el gráfico 1, en cuanto a la consideración de aspectos reales para la solución del problema propuesto, se obtuvo en los grupos intervenidos un mayor número de estudiantes que aportaron elementos realistas para justificar su respuesta. Mientras que, en el grupo "control", el único estudiante que hizo alusión a un detalle realista ("más cuerda"), no fue capaz de aportar una solución numérica al problema.

Los porcentajes de consideraciones realistas en este estudio, 30.0 % para el grupo "experimentadores inmersos" y 37.5 % para el grupo "discusión previa", son mucho mayores que los porcentajes logrados en el estudio de Dewolf et al. (2014), presentados en la tabla 1. Además, considerando los niveles del TOLT, para todos, quienes han proporcionado algún tipo de consideraciones realistas, se encontró que de los doce estudiantes del grupo de "discusión previa", seis se hallan en el intervalo [0,2] y los otros seis se ubican en [3,10]. Mientras que en el grupo de "experimentadores inmersos", siete estudiantes se encuentran en [0,2] y dos en [3,10].

Argumentos y modelos situacionales realizados por los estudiantes

Reacciones o respuestas que aluden al contexto real (RR)

La respuesta dada, mayoritariamente, por los estudiantes fue "8 cuerdas" (67/98 estudiantes, aproximadamente 68.37 %), además de presentar alguna operación (suma, división o multiplicación) para demostrar la obtención de dicho valor. Este resultado, aunque es matemáticamente correcto, no toma en cuenta aspectos de la realidad en la construcción de un tendedero. Por ejemplo, se podría argumentar el uso de cuerda adicional, ganchos, o el uso de otros dispositivos para atar las cuerdas o unirlas entre sí; además de proponer alternativas para amarrarlas a los postes. En este sentido, algunos estudiantes agregaron detalles realistas para explicar la necesidad de más cuerda para realizar los nudos entre cuerdas y para amarrarla a los postes. Estos detalles son considerados en este estudio como reacciones o respuestas que aluden al contexto real (RR).

Otros estudiantes, no evidenciaron comprensión sobre la elección de la operación, el resultado obtenido y su "relación" con la solución real del problema. Sin embargo, aunque no estaban conscientes de cómo obtener una cantidad de cuerda equivalente a la distancia entre los postes, sí incluyeron elementos reales en sus argumentos: por ejemplo, hacen referencia a la cuerda necesaria para atar "nudos entre cuerdas". Entre estos casos están los que operaron incorrectamente 12 por 1.5 y obtuvieron 18 (cuerdas). Otros más sólo intentaron mencionar condiciones realistas del problema y dar una solución sin tratar de realizar alguna operación. Además de varias respuestas en cuyos argumentos, operaciones o dibujos se evidencian la falta de comprensión acerca de la situación dada.

No obstante, algunos estudiantes incluyeron elementos reales relevantes en sus argumentos, aunque no se da una justificación de la solución obtenida: "se necesita más cuerda…." o "yo le pondría ganchos". En todos estos casos, donde se ha hecho alusión a elementos del contexto real, en los argumentos escritos, se clasifica la respuesta como respuesta o reacción realista (RR).

Soluciones no realistas (SNR)

Como soluciones no realistas (SNR) fueron clasificadas:

- Las soluciones que se restringen al resultado "8 cuerdas" o dan cualquier otro valor, obtenido explícita o implícitamente mediante una operación, sin aportar detalles que muestren el uso de consideraciones realistas en su solución;
- Las soluciones que no aportan ninguna respuesta, ni tratan siquiera de proponer elementos realistas que consideren el contexto, sin aludir a elementos realistas en sus argumentos.

En muchos casos, los estudiantes explican exhaustivamente la forma en que realizaron su o sus operaciones para obtener el número "8" (cuerdas), sin embargo, no consideran el contexto real del problema. En otros casos, en lugar de cuerdas, se refieren a segmentos. En general, todos los argumentos en los que los estudiantes se apegan a un resultado aritmético o explican las operaciones realizadas, sin confrontar dicho resultado con la realidad, son considerados como soluciones no realistas (SNR).

A continuación se presentan algunos casos de los argumentos brindados por los estudiantes de cada grupo. También se indica el puntaje obtenido en la prueba TOLT y se clasifica su respuesta como respuesta o reacción realista (RR) o solución no realista (SNR).

Además, se presentan algunos ejemplos de los modelos situacionales elaborados por los estudiantes, así como su puntaje TOLT y el grupo al que pertenece: grupo "control" (GC), grupo de "discusión previa" (DP) y grupo de "experimentadores inmersos" (EI).

Tabla 3. Ejemplos de argumentos dados por los estudiantes para justificar sus soluciones, clasificados como respuestas o reacciones realistas (RR) o soluciones no realistas (SNR)

Estudiante/ Ptos. TOLT	Argumento del estudiante	Grupo	Clasificación
D8/1	"Matemáticamente se necesitan 8 cuerdas, pero no se toma en cuenta lo que se gastará en los nudos y amarres… se tomaría también un poco más de cuerda"	DP	RR
D6 /2	"Bueno yo multipliqué 1.5 hasta que me salió 12… 1.5 x 8=12 y así obtuve el resultado"	DP	SNR
D19/2	"Multiplicando la distancia que hay entre el poste por el largo de la cuerda. Pero no estamos contando lo que se lleva el nudo entre cada cuerda. Sin contar cuántas tiene 18 cuerdas"	DP	RR
D7/5	"Pues la verdad depende de muchos cosas como la forma, el tamaño de los nudos, qué tamaño lo quiere, cuánto necesita que cuelgue, etcétera."	DP	RR
D10/4	"La suma de 1.5 y 1.5 da un resultado de 3 metros, 3 x 4 es 12, entonces, 1.5 por 8 es 12"	DP	SNR
A12/1	"Tengo una distancia que cubrir de 12 m… tal vez 8 exactamente, pero no me vendrían nada mal 2 de repuesto… unas 10 estaría bien, porque necesitaré amarrarlas al poste y no sé cuánto mida… deberé comprar más cuerda"	EI	RR
A5/0	"Tengo cuerdas de 1.5 m y uso una cuerda extra para atar las cuerdas y queden unidas"	EI	RR
A30/8	"Como son 12 m de cuerda y solamente hay de 1.5 se tiene que dividir a 12 entre 1.5 para que se pueda saber cuántas cuerdas se necesitan"	EI	SNR
A13/10	"Se utilizan 9 cuerdas ya que se toma en cuenta los nudos para unir una cuerda con otra"	EI	RR
A14/1	"Pero considerando la realidad debería de darse margen a un espacio para que se puedan amarrar… como 20 cm de cada lado de la cuerda para amarrarla…"	EI	RR

Estudiante/ Ptos. TOLT	Argumento del estudiante	Grupo	Clasificación
C5/9	"Como la distancia a cubrir son 12 m y tengo que hacerla con segmentos de 1.5 m. Divido 12 entre 1.5… el resultado será el número total de segmentos…"	GC	SNR
C38 /7	"Se divide 12 entre 1.5 para saber cuántas veces 1.5 da 12"	GC	SNR

Ejemplos de los modelos situacionales elaborados por los estudiantes

En las siguientes figuras se muestra el modelo situacional realizado por algunos estudiantes, en correspondencia con los argumentos ejemplificados en la tabla 3.

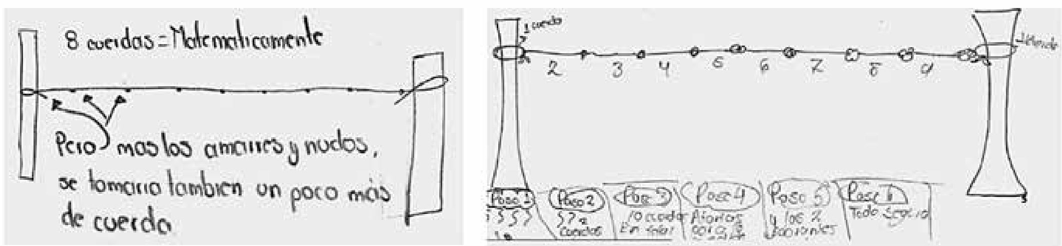


Figura 1. Estudiantes D8 y A12 muestran "solución realista" en sus argumentos

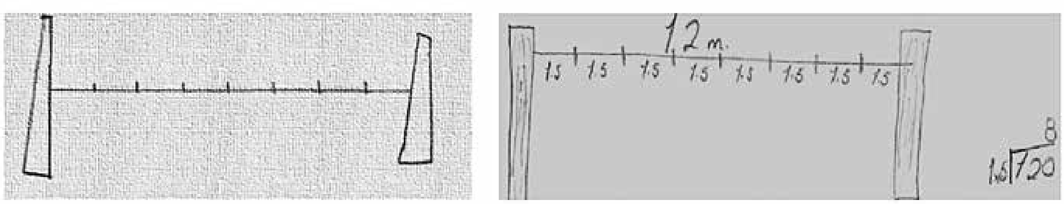


Figura 2. Estudiantes D6 y A30 han dado soluciones "no realistas"

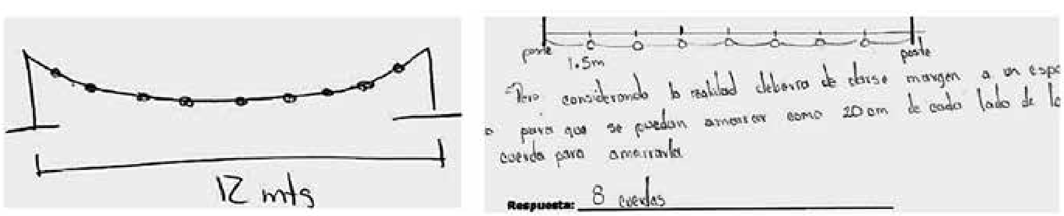


Figura 3. Estudiantes D7 y A14 han dado "soluciones realistas"

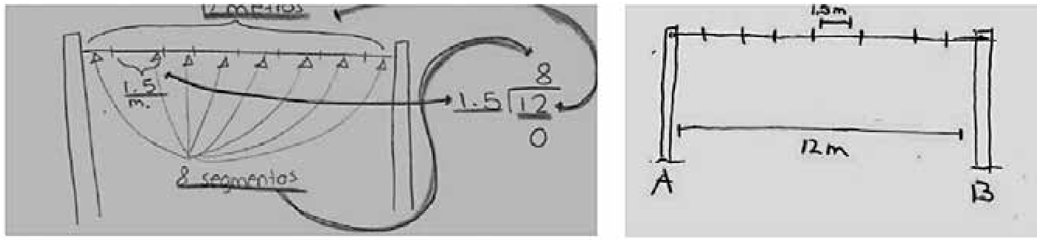


Figura 4. Estudiantes C5 y C38 han dado soluciones “no realistas”

Análisis de resultados

Al inicio del estudio se aplicó la prueba TOLT a tres grupos de estudiantes para determinar si el puntaje obtenido por cada estudiante podía ser relacionado con la inclinación de estos hacia consideraciones realistas en la resolución de un problema verbal. Sin embargo, considerando la posible presencia de efectos debidos al “contrato didáctico”; o la presencia de sesgos cognitivos en las respuestas de los estudiantes, se decidió aplicar el mismo problema a cada grupo, pero aplicando una variación en la forma de presentarlo a dos de ellos. La variante consistió en inducir en los estudiantes el uso de consideraciones realistas en la resolución de problemas.

A continuación, se describen algunos aspectos observados en los resultados del estudio.

La tabla 2, muestra que los estudiantes con puntajes en el intervalo [0, 2] representan un porcentaje entre 70% y 80% de su grupo; y los puntajes mayores que dos oscilaban entre 20% y 30%. Estos resultados permiten suponer que los puntajes de la prueba TOLT se hallan presentes de un modo uniforme en cada uno de los grupos del estudio. Por lo cual, se podía suponer que su comportamiento en la resolución del problema dado sería similar. Sin embargo, según el gráfico 1, los grupos que recibieron alguno de los tratamientos presentaron más casos de elementos realistas en sus argumentaciones. Mientras que en el grupo “control” fue casi nula la inclinación de los estudiantes hacia una respuesta realista.

Por otra parte, en los ejemplos mostrados en las figuras 1-4 y la tabla 2, se puede observar que la inclinación hacia el uso de consideraciones realistas en la solución del problema, no se halla condicionada por el puntaje que el estudiante ha obtenido en la prueba de razonamiento lógico (TOLT). Se puede ver que tanto estudiantes con puntajes muy bajos (0, 1, 2), como estudiantes con puntajes mayores aportan elementos realistas al resolver el problema planteado, tanto en sus argumentos, como en sus ilustraciones (por ejemplo, dibujando nudos, lazos, ganchos).

De igual manera, se observa que algunos estudiantes con puntajes altos restringen su solución a la operación aritmética realizada, y a su descripción. Inclusive, en muchos procedimientos realizados por los estudiantes existe una fuerte tendencia hacia la ejecución mecánica de operaciones aritméticas, con cierto grado de inconsciencia hacia el contexto del problema. Esto se puede notar en los modelos realizados, donde se representa la cuerda del tendedero en forma de segmentos de recta. Por ejemplo, en el grupo "control", donde ningún estudiante con puntaje en el intervalo [3,10] presentó consideraciones realistas en sus argumentos, los estudiantes explicaron con mayor detalle las operaciones que realizaron para obtener su respuesta.

En el grupo de "discusión previa", se propuso a los estudiantes un problema para ser discutido con respecto a sus posibles soluciones, considerando la realidad del contexto y porcentaje involucrado. Con ello se trató de ayudar a los estudiantes a contrarrestar su tendencia a dar respuestas de acuerdo con lo que creen que espera el docente de matemáticas. En la discusión del problema de la "carrera de los 100 metros", algunos estudiantes se atrevieron a cuestionar la respuesta obtenida aritméticamente (10 * 17 = 170) y presentaron otras soluciones ("17 segundos era el mejor tiempo… entonces probablemente tarde más de 170 segundos…"). Sin embargo, esto no implica que todos hayan captado la idea sobre la necesidad de considerar la realidad como parte de la solución a un problema verbal realista. No obstante, se obtuvieron doce respuestas que se inclinaron hacia consideraciones realistas sobre el contexto del tendedero. Esas respuestas demuestran que ocurrió la transferencia del conocimiento matemático a un contexto diferente (Evans, 1999).

En el grupo de "experimentadores inmersos", nueve estudiantes aportaron elementos realistas a sus procedimientos. Estos estudiantes tenían escrito en la indicación general: "Lee con atención el siguiente problema y, al resolverlo, piensa en la situación real que representa. Imagina que realizas lo que el problema propone". Esta indicación tenía como propósito sugerir o invitar al estudiante a considerarse a sí mismo como quien realiza la acción propuesta en el problema. Esto trata de que el estudiante se convierta en un "experimentador inmerso" en la resolución del problema dado. Es decir, se trataba de que al leer esta indicación se activaran representaciones experienciales de palabras, así como representaciones experienciales asociadas a referentes de situaciones conocidas por los estudiantes, relacionadas con tendederos, cuerdas, nudos, etc. Sin embargo, existe la posibilidad de que muchos estudiantes se han acostumbrado a "saltarse" las indicaciones dadas en una prueba, por creer que lo fundamental es realizar una operación con los datos para dar respuesta a un problema.

Tanto en el grupo de "discusión previa" como en el grupo de "experimentadores inmersos", se puede destacar que, posiblemente las intervenciones realizadas ayudaron a incrementar el número de estudiantes que se inclinaron hacia el uso de consideraciones realistas en la solución del problema. Además, en ambos grupos la presencia de consideraciones realistas es independiente del puntaje logrado por los estudiantes en la prueba de razonamiento lógico. Por otra parte, los estudiantes que no involucraron la realidad en sus soluciones y se limitaron a describir las operaciones realizadas, en los grupos intervenidos, mostraron la misma tendencia que la mayoría de estudiantes del grupo "control".

La respuesta más frecuente fue "8 cuerdas", en 67 de los estudiantes, la cual corresponde aritméticamente con los datos del problema. Sin embargo, ese resultado fue razonado con respecto a la situación sólo en 22 de los casos. Por ejemplo, el estudiante D8 escribió "matemáticamente se necesitan 8 cuerdas, pero no se toma en cuenta lo que se gastará en los nudos y amarres… se tomaría también un poco más de cuerda". Pero el estudiante C38 escribió "se divide 12 entre 1.5 para saber cuántas veces 1.5 da 12".

De esto puede destacarse el hecho de que los estudiantes tienden a realizar operaciones mecánicamente para dar una respuesta que se espera de ellos cuando se les da a resolver un problema, y tienden a realizar un esfuerzo cognitivo más simple, sin detenerse a pensar en los detalles realistas del problema. Tal parece que a la matemática no se le relaciona con la realidad y los estudiantes creen que las matemáticas escolares nada tienen que ver con la vida fuera de la escuela.

Cuando se les cuestionó a los estudiantes sobre sus respuestas no realistas, algunos expresaron que sí les parecía que había otras posibilidades de respuesta, pero no se atrevían a escribirlas por temor a que el docente creyera que estaban "tomando en broma" el trabajo propuesto. Es posible que los estudiantes pensaran en otras posibles respuestas más apegadas a la realidad, las cuales tendrían que razonar un poco más a fondo. Sin embargo, algunos se inhibieron y, dieron respuestas basadas en operaciones que involucraron los valores dados en el enunciado del problema.

Como ya se ha dicho, una explicación a este tipo de respuesta no realista puede deberse en parte a lo que Brousseau (1997) denomina "contrato didáctico". En este caso se refiere a la tendencia a resolver los problemas verbales de acuerdo con lo que consideran que espera su profesor o la resolución mediante una operación que contenga los valores presentes en el enunciado del problema, para dar un resultado, sin cuestionar la validez del mismo dentro de un contexto real. Otra posible explicación podría darse en términos de "sesgos cognitivos" (Kahneman, 2012), donde los estudiantes utilizan atajos cognitivos incluso cuando tienen datos adicionales que permitirían una evaluación más fiable. Estos atajos mentales, usados para simplificar la solución de un problema, les permiten realizar evaluaciones en función de datos incompletos y parciales, lo cual conlleva, en este caso, soluciones no realistas a un problema que involucra aspectos de la realidad.

Conclusión y futuros estudios

De acuerdo con las respuestas a las preguntas de investigación planteadas en este estudio, se puede concluir lo siguiente:

- Con las intervenciones aplicadas ("discusión previa" y "experimentadores inmersos"), sí es posible inducir en el desempeño de los estudiantes un porcentaje significativo de las consideraciones realistas de la solución al problema verbal estudiado. Este porcentaje es mucho mayor que los porcentajes obtenidos con la intervención en la que se proporcionaron a los estudiantes en Turquía y Bélgica las ilustraciones y advertencias combinadas (Dewolf et al, 2014). La diferencia no se puede explicar usando el argumento de que se trata de los estudiantes en diferentes niveles educativos (quinto de primaria y tercero de secundaria, porque el grupo de control tenía solamente 2.7 % consideraciones realistas. Ese porcentaje es dos veces menor que el porcentaje logrado en Bélgica, con la intervención en que se proporcionan a los estudiantes tanto la ilustración como la advertencia.
- La inclinación hacia consideraciones realistas durante la resolución de un problema no depende exclusivamente del nivel del razonamiento lógico de los estudiantes. Esas consideraciones pueden

estar presentes en los estudiantes con nivel bajo de razonamiento lógico y ausentes en los estudiantes con nivel alto de tal habilidad cognitiva.

En futuros estudios se intentará desarrollar e implementar este diseño experimental, con grupos de mayor número de estudiantes, con las intervenciones más estructuradas y mejor ejemplificadas. También sería interesante explorar efectos de las intervenciones más extendidas temporalmente, implementadas y practicadas no en una sola sino en varias sesiones (Verschaffel y Corte, 1997).

Referencias bibliográficas

Acevedo, J., y Oliva, M. (1995). Validación y aplicaciones de un test de razonamiento lógico. *Revista de psicología general y aplicada: Revista de la Federación Española de Asociaciones de Psicología*, *48*(3), 339-351.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86-95.

Brousseau, G. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Dewolf, T., Van Dooren, W., Ev Cimen, E. & Verschaffel, L. (2014) The Impact of Illustrations and Warnings on Solving Mathematical Word Problems Realistically, *The Journal of Experimental Education*, *82*(1), 103-120.

Dewolf, T., Van Dooren, W., Hermens, F., & Verschaffel, L. (2015). Do students attend to representational illustrations of non-standard mathematical word problems, and, if so, how helpful are they? *Instructional Science*, *43*(1), 147- 171.

Evans, J. (1999). Building bridges: Reflections on the problem of transfer of learning in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1-3), 23-44.

Juárez. J.A., Mejía, A., González, A. y Slisko, J. (2014). La construcción del modelo situacional de un problema matemático: El análisis basado en el Marco del Experimentador Inmerso. *Números*, *87,* 81-99.

Kahneman, D. (2012). *Pensar rápido, pensar despacio*. Random House Mondadori, Grupo Editorial España.

Rojas, A., Contreras, A., y Arévalo, M. (2011). Intervención didáctica para promover el aprendizaje de las matemáticas en niños con discalculia. *Revista de la Universidad Francisco de Paula Santander*, *16*(2), 5-13.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics, en D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan, 334-370.

Ticha, M., & Hospesova, A. (2006). Qualified pedagogical reflection as a way to improve mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(2), 129-156.

Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Teaching Realistic Mathematical Modeling in the Elementary School: A Teaching Experiment with Fifth Graders. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 577-601.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

Vicente, S., y Orrantia, J. (2007). Resolución de problemas y comprensión situacional. *Cultura y Educación, 19*(1), 61-85.

Zwaan, R. A. (2004). The immersed experiencer: Toward an embodied theory of language comprehension. *The psychology of learning and motivation*, *44*, 35-62.

Estudio del aprendizaje del supremo mediante una secuencia didáctica basada en la teoría APOE

Rubén Blancas Rivera y Lidia Aurora Hernández Rebollar[14]

La teoría APOE (siglas de acción, proceso, objeto, esquema) toma como marco de referencia epistemológico a la teoría de Piaget. En la teoría APOE se hace una construcción o modelo de la manera en la que se construyen o se aprenden conceptos matemáticos, en particular, en la educación superior. En este trabajo se analizan los efectos de una secuencia didáctica que se diseñó para el aprendizaje del concepto del supremo. Dicha secuencia está basada en la teoría APOE y se aplicó a un grupo del primer semestre de la carrera de matemáticas aplicadas. La evaluación de la secuencia didáctica se lleva a cabo a través del análisis de las respuestas que dieron los estudiantes a un cuestionario diseñado para este fin. El cuestionario se aplicó también a otro grupo de primer semestre de la carrera de matemáticas, que no siguió la secuencia didáctica, con la finalidad de comparar sus respuestas.

Introducción y marco teórico

La teoría APOE se desarrolla tomando como marco de referencia epistemológico a la teoría de Piaget. En esta teoría se propone un modelo para explicar la manera en la que se construyen o se aprenden conceptos matemáticos, en particular, del nivel superior de educación. En esta teoría

[14] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). Correo-e: Rubén Blancas, rublan.fcfm@gmail.com / Lidia Aurora Hernández, correo-e: lhernan@fcfm.buap.mx

se afirma que la construcción de un concepto pasa por tres etapas básicas denominadas acción, proceso y objeto a través de la acción reflexiva (Trigueros, 2005). El aprendizaje de un concepto de matemáticas dado inicia con la manipulación de una estructura mental construida previamente o de un objeto físico que se traduce en una acción (Arnon et al, 2014). Así, una *acción* es la transformación del objeto o concepto que es percibida por el individuo como externa. Si una persona resuelve problemas, en los que se involucra al objeto, haciendo uso únicamente de este tipo de transformaciones, entonces decimos que tiene una *concepción acción* del concepto. Las acciones son interiorizadas para formar procesos. El *proceso* es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos externos y en la cual el individuo puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos. Si una persona resuelve problemas y da muestras de utilizar transformaciones de este tipo, cuando el problema a tratar lo requiere, decimos que tiene una *concepción proceso* del concepto estudiado. Los procesos son encapsulados para formar objetos y finalmente las acciones, los procesos y los objetos son organizados para formar *esquemas* (Asiala et al, 1996).

Cuando se utiliza la teoría APOE en la investigación o en el diseño de material didáctico, se empieza siempre por hacer una descomposición genética de los conceptos de interés. En dicha descomposición genética se destacan las acciones, los procesos y la forma en que estos se van estructurando para posibilitar la construcción de la concepción objeto (Trigueros, 2005). Si la investigación así lo requiere, en una descomposición genética también se describe cómo debe ser la interacción entre las estructuras mentales descritas antes para dar lugar a los esquemas.

Esta teoría se ha utilizado de diferentes maneras en la investigación. Weller et al (2003) clasificaron las investigaciones que se apoyan en la teoría APOE en cuatro tipos:

- Estudios comparativos, en los cuales se compara el desempeño de estudiantes que han recibido un curso diseñado con esta teoría con el desempeño de estudiantes que han recibido un curso tradicional.
- Estudios no comparativos en los cuales se mide el desempeño de estudiantes que han atendido un curso basado en la teoría APOE.
- Estudios sobre el nivel cognitivo alcanzado por estudiantes que han trabajado en un curso basado en la teoría APOE y;

- Estudios que comparan las actitudes de estudiantes y el impacto a largo plazo de cursos basados en la teoría APOE con las actitudes de estudiantes y el impacto a largo plazo de cursos tradicionales.

La investigación que se presenta aquí es del primer tipo y tiene el objetivo de valorar una secuencia didáctica, diseñada con base en la teoría APOE, a través de la comparación del desempeño de un grupo de estudiantes que trabajó el concepto del supremo, mediante dicha secuencia didáctica con el desempeño de otro grupo de estudiantes que estudió el concepto del supremo de manera tradicional (la cual se detallará más adelante).

En las secciones siguientes se describirá la secuencia didáctica que se aplicó al grupo de estudio, la metodología utilizada en esta investigación, los resultados, el análisis y las conclusiones.

La secuencia didáctica

Una secuencia didáctica es un conjunto articulado de actividades de aprendizaje que, con la mediación del docente busca el aprendizaje de algún concepto.

La secuencia didáctica que se presenta está basada en la descomposición genética del concepto del supremo reportada por Hernández y Trigueros (2012) y se diseñó como parte del trabajo de tesis de Acevedo (2011).

La secuencia didáctica consta de ocho sesiones, en las cuales se programan actividades para que el estudiante vaya construyendo cada una de las estructuras mentales indicadas por la teoría hasta la concepción objeto. Enseguida presentamos una síntesis de lo que se propone trabajar en cada sesión, la secuencia didáctica completa se puede consultar en la tesis mencionada arriba.

Sesión 1. Cota superior

Concepción	Actividades para el Aprendizaje Autónomo	Actividades para el Docente
Acción	Se proporcionan varios conjuntos numéricos de los que se pide hallar un número mayor o igual a todos los elementos de cada uno de los conjuntos.	Institucionalización del concepto de cota superior y de conjunto acotado superiormente.

Sesión 2. Supremo

Concepción	Actividades para el Aprendizaje Autónomo	Actividades para el Docente
Acción	Se les pide que determinen el conjunto de cotas superiores de conjuntos previamente proporcionados y el elemento menor del conjunto de cotas.	Definición formal de supremo. Se demuestra la unicidad del supremo.

Sesión 3. Supremo

Concepción	Actividades para el Aprendizaje Autónomo	Actividades para el Docente
Acción	Se les proporcionan diferentes conjuntos y se les pide que determinen el supremo y que demuestren su respuesta.	Se demuestra que cierto número es el supremo de conjuntos generales, como intervalos abiertos y cerrados.

Sesión 4. Máximo

Concepción	Actividades para el Aprendizaje Autónomo	Actividades para el docente
Acción	Se les pide reflexionar sobre si el supremo siempre pertenece al conjunto o no, analizando varios conjuntos.	Se formaliza la definición de máximo. Se demuestra que el máximo es único y que si un conjunto que cumple ciertas hipótesis tiene máximo, entonces el máximo es el supremo.

Sesión 5. Axioma del supremo

Concepción	Actividades para el Aprendizaje Autónomo	Actividades para el Docente
Proceso	Se les cuestiona si cualquier conjunto acotado tiene supremo. Se dan algunos casos particulares para que sean analizados.	Se enuncia el axioma del supremo.

Sesión 6. Propiedades del supremo

Concepción	Actividades para el Aprendizaje Autónomo	Actividades Para el Docente
Objeto	Se analizan varios ejemplos en los que se observa que cualquier número a la izquierda del supremo no es cota superior.	Se demuestra el teorema que garantiza que existe un número a en un conjunto A, no vacío, tal que a está entre el supremo de A y el supremo menos un real positivo.

Sesión 7. Propiedades del supremo

Concepción	Actividades para el Aprendizaje Autónomo	Actividades para el Docente
Objeto	Se dan ejemplos de conjuntos que estén uno contenido en el otro y se les pide analizar la relación que guardan los supremos de cada conjunto.	Probar que, en general, si un conjunto A está contenido en otro B, A y B no vacíos y además acotados superiormente entonces $\sup A \leq \sup B$

Sesión 8 Propiedades del supremo

Concepción	Actividades para el Aprendizaje Autónomo	Actividades
Objeto	Cuestionar si la unión de dos conjuntos acotados y no vacíos es también acotada. De igual forma con la intersección.	Se demuestra que la unión e intersección (no vacía) de dos conjuntos acotados, no vacíos, es también un conjunto acotado.

Aspectos Metodológicos

La secuencia didáctica se desarrolló como parte del curso denominado Matemáticas Básicas impartido en otoño de 2013 al grupo de estudiantes de la carrera de Matemáticas Aplicadas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Este curso consta de cinco horas semanales de teoría y cinco horas semanales de resolución de problemas. La secuencia didáctica se aplicó en las dos secciones del curso (teoría y práctica) aunque cada sección tuvo un profesor diferente. En la parte teórica, la secuencia didáctica se implementó mediante el trabajo colaborativo en grupos de cinco o seis estudiantes. En la sección de resolución de problemas se trabajó grupalmente, a este grupo lo llamaremos grupo A.

Después de concluir la secuencia didáctica se aplicó un cuestionario al grupo A que siguió la secuencia didáctica y a otro grupo de estudiantes que cursaban también la materia Matemáticas Básicas, al cual llamaremos grupo B. Este segundo grupo estudió el tema del supremo de manera tradicional (el profesor expuso la teoría en el pizarrón bajo el esquema, definición, teorema, demostración y después los estudiantes resolvieron ejercicios y problemas relacionados con el tema).

Instrumento de investigación

La prueba se estructuró de tal manera que cada pregunta nos diera información sobre el nivel cognitivo en el que se encontraban los estudiantes, ya sea acción, proceso u objeto de los conceptos involucrados en el aprendizaje del supremo.

Las consignas fueron las siguientes:

1. Escribe la definición formal de supremo
2. Determina el supremo de los conjuntos siguientes y demuestra que el número encontrado satisface la definición de supremo:
   a) $(-8,16) \cap [-1,3]$
   b) $(-\infty, 1) \cup (0,4)$
3. Si $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ y $A \cap B \neq \emptyset$, A y B acotados. Demuestra que *min* $\{supA, supB\} \geq sup\,(A \cap B)$

En la pregunta uno, la intención fue saber si el estudiante conocía la definición de supremo y la podía escribir correctamente y con el uso de símbolos y proposiciones lógicas. La pregunta dos, tiene dos incisos y cada inciso tiene dos consignas: determinar el supremo y demostrar que el número hallado satisface la definición. En el primer inciso, el conjunto que resulta de la intersección es un intervalo cerrado y en el segundo inciso el conjunto que resulta de la unión es un intervalo abierto. Si el estudiante determina el supremo de esos conjuntos, diremos que tiene una concepción acción, si logra demostrar que éste es el supremo, se dirá que tiene una concepción proceso.

Aunque el nivel cognitivo o concepción del supremo es el mismo en ambos incisos, en el segundo, el conjunto resulta ser un intervalo abierto y, en este caso, las habilidades que se requieren para demostrar que el número propuesto como supremo cumple con la definición son más complejas que las que se aplican en el caso de un intervalo cerrado. Cuando se trata de un intervalo cerrado la demostración de que cierto número es el supremo de este conjunto es directa, pero si el intervalo es abierto entonces la demostración debe hacerse por contradicción o por contra-recíproca. Por lo tanto, si un estudiante realiza con éxito la actividad 2.b diremos que ha alcanzado una concepción proceso del supremo y una concepción proceso en demostraciones formales.

La demostración de que cierto número es el supremo de un intervalo abierto o cerrado es una actividad de la secuencia didáctica que se aplicó, y se solicita también en un curso tradicional. En tanto que la pregunta tres es más abstracta que la número dos, ya que necesita que el estudiante manipule el concepto del supremo y otros, expresados de manera general. Por lo tanto, si el estudiante logra probar este enunciado diremos que ha alcanzado la concepción objeto del supremo.

Resultados

Enseguida se enlistan las etiquetas usadas para las respuestas que dieron los estudiantes a la pregunta 1:

Definición correcta. El estudiante escribió la definición formal de supremo utilizando símbolos y proposiciones lógicas correctamente.

Axioma del supremo. En lugar de escribir la definición formal de supremo, el estudiante escribió el axioma del supremo.

Cota superior. El estudiante escribió la definición de cota superior de un conjunto en lugar de la definición de supremo.

Mínima cota superior. El estudiante escribió que el supremo de un conjunto es la mínima de las cotas superiores del conjunto.

Tabla 1. Respuestas a la pregunta 1

Casos	Grupo A	Porcentaje	Grupo B	Porcentaje
Definición correcta	29	58%	2	12%
Axioma del supremo	5	10%	1	7%
Cota superior	6	12%	4	23%

Casos	Grupo A	Porcentaje	Grupo B	Porcentaje
Mínima cota superior	5	10%	10	58%
No contestó	3	6%	0	0%
No legible	2	4%	0	0%
Total	50	100%	17	100%

En la tabla 1 se puede apreciar la frecuencia y el porcentaje de cada una de las respuestas en cada uno de los grupos. Se observa que un poco más de la mitad de los estudiantes del grupo A pudo dar la definición formal del concepto del supremo correctamente, mientras que en el grupo B el porcentaje fue de 12%. En ambos grupos hubo un porcentaje bajo de estudiantes que confundieron el axioma con la definición del supremo, lo cual es contrario a lo que se reportó en Hernández y Trigueros (2012). Por otro lado, en el grupo B, se observa que más de la mitad, dio la definición del supremo de un conjunto como la menor de las cotas superiores, respuesta que consideramos informal por no utilizar símbolos y proposiciones lógicas, y por lo tanto no se consideró correcta. Una definición correcta es como la que se muestra en la figura 1.1 y que fue dada por más de la mitad de los estudiantes del grupo A. En la figura 1.2 se muestra una definición informal como la que fue dada por la mayoría de los estudiantes del grupo B.

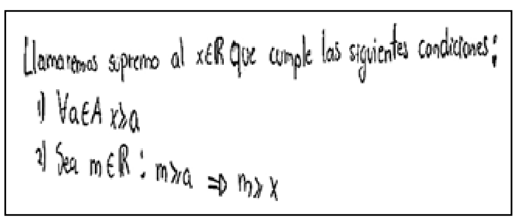


Figura 1.1. Definición formal de supremo dada por el estudiante A3

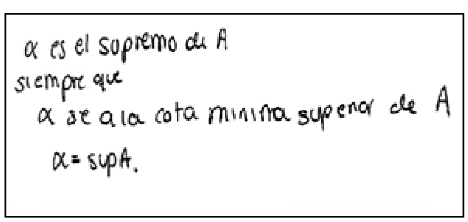


Figura 1.2. Definición informal de supremo dada por el estudiante B8

Pregunta 2. Enseguida se enlistan las diferentes respuestas que dieron los estudiantes a la pregunta 2.a.

Tabla 2. Respuestas a la pregunta 2.a

Casos	Grupo A	Porcentaje	Grupo B	Porcentaje
Solo determinaron el supremo	30	60%	4	45%
Determinaron y dieron una cota específica para demostrar	6	12%	7	43%
Determinaron e intentaron demostrar por contradicción	3	5%	1	0%
Determinaron y demostraron correctamente	7	15%	0	0%
No determinaron el supremo	0	0%	4	12%
No contestaron	4	8%	0	0%
Total	50	100%	17	100%

En la primera parte de esta pregunta, "determinar el supremo", observamos que 92% de los estudiantes del grupo A lo hicieron correctamente, y en el grupo B fue de 88%. La diferencia entre los porcentajes de respuestas correctas aumenta entre estos grupos cuando intentaron demostrar que el número hallado era el supremo del conjunto dado. En el grupo A, 12% intentó demostrar su afirmación usando un caso particular (dando un valor específico a una cota superior del conjunto en la segunda parte de la demostración), y en el grupo B, 43% lo intentó de esta manera.

La figura 2.2 muestra un ejemplo de esta categoría, el estudiante propone una cota superior particular, c = 3.01 en lugar de una arbitraria. También hay una diferencia entre el porcentaje de los estudiantes del grupo A, que lograron demostrar correctamente usando la definición de supremo (15%), y los del grupo B en donde ninguno pudo hacerlo. En la figura 2.1 se presenta la demostración de un estudiante del grupo A, en la cual podemos apreciar los elementos formales y la estructura de la definición del supremo, aplicada a un conjunto particular. Cabe señalar que en el grupo B 12% tuvo problemas para calcular la intersección de los conjuntos dados, el cual es un concepto anterior al del supremo. Estos resultados nos dicen que fueron más los estudiantes del grupo A que comprendieron la definición formal del supremo y la pudieron aplicar a un conjunto concreto, que los del grupo B. Así, obtenemos que 15% del grupo A ha alcanzado el nivel proceso del concepto del supremo.

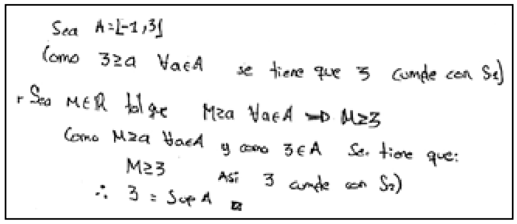


Figura 2.1. Demostración del estudiate A10

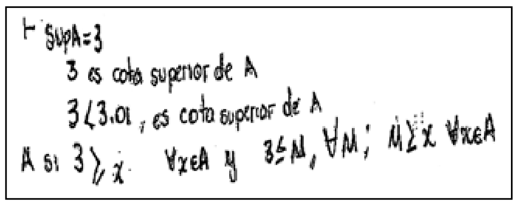


Figura 2.2. Respuesta del estudiante B5

Pregunta 2.b. Las respuestas a la pregunta 2.b se clasificaron en las mismas categorías que las de 2.a y sus porcentajes se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. Respuestas a la pregunta 2.b

Casos	Grupo A	Porcentaje	Grupo B	Porcentaje
Solo determinaron el supremo	25	50%	4	24%
Determinaron y dieron una cota específica para demostrar	6	12%	7	41%
Determinaron e intentaron demostrar por contradicción	8	16%	1	6%
Determinaron y demostraron correctamente	5	10%	0	0%
No determinaron el supremo	0	0%	5	29%
No contestaron	6	12%	0	0%
Total	50	100%	17	100%

Al sumar los primeros cuatro renglones de la columna 3 de la tabla 3 obtenemos que, en el grupo A, 88% determinó el supremo correctamente, mientras que en el grupo B fue 71%. Un porcentaje considerable del grupo B, 41%, intentó demostrar usando un caso particular, dando una cota superior específica en la segunda parte de la demostración (ver figura 2.4), mientras que en el grupo A, 16% intentó demostrar por contradicción y sólo fue 12% el que lo intentó usando un caso particular. En el grupo A, 10% demostró que el número elegido era el supremo, ya sea por contradicción o de manera directa, mientras que en el grupo B ninguno logró demostrar correctamente su afirmación. En la figura 2.3 se muestra la respuesta de un estudiante del grupo A, a esta pregunta.

En esta actividad también se observaron dificultades en los estudiantes del grupo B en el tema de conjuntos, casi la tercera parte no pudo determinar el supremo de la unión de los conjuntos dados debido a que no operaron correctamente dichos conjuntos.

El porcentaje de los que demostraron correctamente en este inciso disminuyó con respecto al inciso anterior, tal como se esperaba y se explicó en el análisis hecho renglones arriba y en la descomposición genética en la que se basó la secuencia.

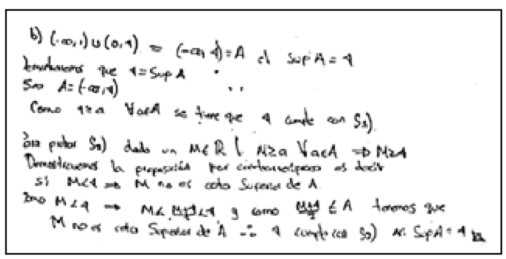


Figura 2.3. Demostración del estudiate A21

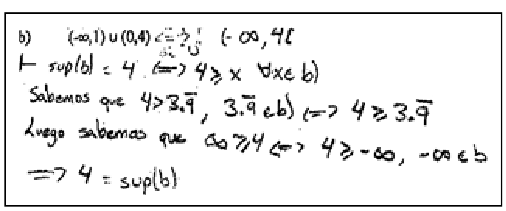


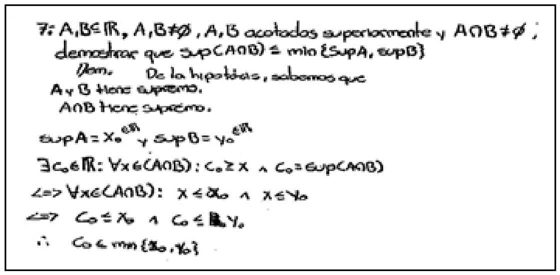
Figura 2.4. Respuesta del estudiante B2 a la pregunta 2b

Pregunta 3. Enseguida se enlistan los diferentes tipos de respuestas que dieron los estudiantes a la pregunta 3.

Tabla 4. Respuestas a la pregunta 3

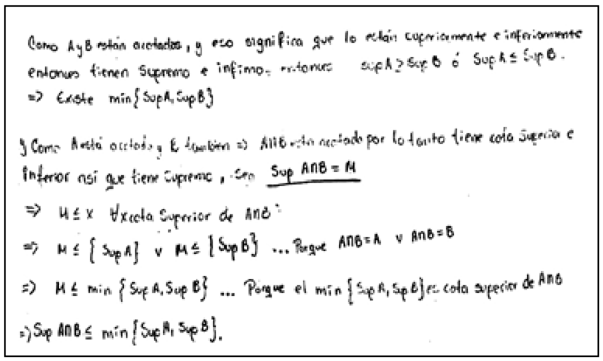
Casos	Grupo A	Porcentaje	Grupo B	Porcentaje
Intentaron usando un caso particular	1	2%	1	6%
Errores en conjuntos	2	4%	5	29%
Sólo escribieron definiciones	14	28%	2	12%
Usaron teoremas incorrectamente	2	4%	1	6%
Demostraron por contradicción	2	4%	1	6%
Demostraron directamente	6	12%	0	0%
No contestaron	23	46%	7	41%
Total	50	100%	17	100%

Los estudiantes que respondieron correctamente a esta pregunta muestran que han alcanzado una concepción objeto del concepto del supremo, ya que como se mencionó antes, este concepto y otros relacionados con él se deben manipular de manera general. Lo anterior se pudo observar en 16% del grupo A, en la figura 3.1 se muestra la respuesta de un estudiante de este grupo. Mientras que en el grupo B solo un estudiante (6%) pudo demostrar esta proposición por contradicción. En cada grupo hubo un estudiante que intentó demostrar usando un caso particular, como se muestra en la figura 3.3. El porcentaje de respuestas nulas en esta consigna es muy parecido en ambos grupos (46% y 41%), pero en los intentos de demostración sí se encuentran diferencias. En el grupo A, 28% sólo alcanzó a escribir definiciones de conceptos relacionados con el supremo, y en el grupo B los intentos de 29% dejaron ver deficiencias en propiedades de conjuntos, como se muestra en la figura 3.2 en la que el estudiante afirma que $A \cup B = A$ *y* $A \cup B = B$. De lo anterior, deducimos que los estudiantes en el grupo A, construyeron conceptos relacionados con el supremo (conjuntos, unión, intersección, cota superior, etc.) en un nivel más alto que el que alcanzaron los estudiantes del grupo B. Además, en el primer grupo se notó un mejor manejo de los símbolos y de la lógica. Sin embargo, consideramos que el porcentaje de demostraciones correctas en este ítem es bajo debido a la escasa experiencia de estos estudiantes en demostraciones abstractas.



7: $A,B \subseteq \mathbb{R}$, $A,B \neq \emptyset$, A,B acotados superiormente y $A \cap B \neq \emptyset$;
demostrar que $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$
Dem. De la hipotésis, sabemos que
A y B tiene supremo.
$A \cap B$ tiene supremo.
$\sup A = x_0^{\in\mathbb{R}}$ y $\sup B = y_0^{\in\mathbb{R}}$
$\exists c_0 \in \mathbb{R}: \forall x \in (A \cap B): c_0 \geq x \wedge c_0 = \sup(A \cap B)$
$\Leftrightarrow \forall x \in (A \cap B): x \leq x_0 \wedge x \leq y_0$
$\Leftrightarrow c_0 \leq x_0 \wedge c_0 \leq y_0$
$\therefore c_0 \leq \min\{x_0, y_0\}$

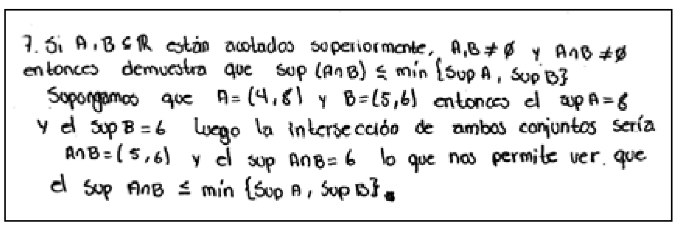
Figura 3.1. Demostración dada por el estudiante A18



Como A y B están acotados, y eso significa que lo están superiormente e inferiormente
entonces tienen Supremo e infimo. entonces $\sup A \geq \sup B$ ó $\sup A \leq \sup B$.
$\Rightarrow$ Existe $\min\{\sup A, \sup B\}$

y Como A está acotado y B también $\Rightarrow$ $A \cap B$ está acotado por lo tanto tiene cota superior e
Inferior así que tiene Supremo, sea $\underline{\sup A \cap B = M}$
$\Rightarrow$ $M \leq x$ $\forall x$ cota Superior de $A \cap B$
$\Rightarrow$ $M \leq \{\sup A\}$ $\vee$ $M \leq \{\sup B\}$ ... Porque $A \cap B = A$ $\vee$ $A \cap B = B$
$\Rightarrow$ $M \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ ... Porque el $\min\{\sup A, \sup B\}$ es cota superior de $A \cap B$
$\Rightarrow \sup A \cap B \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

Figura 3.2. Respuesta del estudiante B15 a la pregunta 3



7. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ están acotados superiormente, $A,B \neq \emptyset$ y $A \cap B \neq \emptyset$
entonces demuestra que $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$
Supongamos que $A = (4,8)$ y $B = (5,6)$ entonces el $\sup A = 8$
y el $\sup B = 6$ luego la intersección de ambos conjuntos sería
$A \cap B = (5,6)$ y el $\sup A \cap B = 6$ lo que nos permite ver que
el $\sup A \cap B \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ ■

Figura 3.3 Respuesta del estudiante B12 a la pregunta 3

Conclusiones

Como se observa en el análisis de las respuestas, el desempeño de los estudiantes que trabajaron con la secuencia didáctica fue mejor que el del grupo B, con respecto a las construcciones del supremo y de los conceptos relacionados con el mismo. Aunque los porcentajes de respuestas correctas en el grupo A no fueron tan altos como se esperaba, se logró que 16% de este grupo alcanzara la concepción objeto del supremo así como un manejo aceptable de los símbolos y las proposiciones lógicas. En el grupo B solamente un estudiante alcanzó este nivel, el resto de los estudiantes, en ambos grupos, mostraron una concepción acción, pues fueron capaces de determinar el supremo de conjuntos numéricos pero no lograron manipular mentalmente este número para demostrar que satisfacía la definición formal.

Uno de los errores más frecuentes que presentaron los estudiantes del grupo B en las demostraciones de la pregunta dos fue el asignar un valor particular a una cota superior que debía ser arbitraria. Lo anterior muestra un nivel bajo de comprensión de la generalidad en proposiciones lógicas, aspecto que seguramente inhibió la concepción proceso de supremo en estos estudiantes. Sólo el estudiante del grupo B que alcanzó el nivel objeto de supremo mostró un desempeño aceptable en el uso de los símbolos y las demostraciones lógicas.

En conclusión, la aplicación de la secuencia didáctica basada en la teoría APOE, favoreció una mejor construcción del concepto del supremo y de otros relacionados con éste en un mayor número de estudiantes, comparados con el grupo que no siguió la secuencia didáctica. Sin embargo, consideramos que el porcentaje de éxito es bajo, por lo que se debe reflexionar sobre el nivel de exigencia de este tema en estudiantes de primer semestre de licenciatura. El análisis a las respuestas de los estudiantes encuestados nos lleva a concluir que, solicitar una demostración formal, en la que se debe manipular el concepto del supremo de manera abstracta, requiere de un mayor tiempo de maduración que el que se dedica en este curso. En cambio, el nivel proceso parece alcanzable con un mayor número de ejercicios.

Por último, agradecemos a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP por el apoyo recibido en el marco del *Programa Jóvenes Investigadores*. Parte del contenido de este capítulo se publicó en las memorias de dicho programa.

Bibliografía

Acevedo, C. (2011) Una secuencia didáctica para el concepto del supremo basada en la teoría APOE, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. Research in *Collegiate Mathematics Education II CBMS Issues in Mathematics Education*, *6*, 1-32.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac¸ A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*, Springer, NY.

Hernández, L. y Trigueros, M. (2012), Acerca de la comprensión del concepto del supremo, *Educación Matemática*, vol. 24, 99-119. Santillana.

Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. *Educación Matemática*, vol. 17, No. 1, pp. 5-31. Santillana.

Weller, K., Clark, J. M., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M. A., & Merkovsky, R. (2003). Student performance and attitudes in courses based on APOS theory and the ACE teaching cycle. In *Research in Collegiate mathematics education* V. CBMS issues in mathematics education, vol. 12, pp. 97-131. Providence, RI: American Mathematical Society.

Desconocimiento del vocabulario matemático básico en estudiantes de bachillerato

Juana Onofre Cortez y Lidia Aurora Hernández Rebollar[15]

En este trabajo se presentan los resultados de un cuestionario de diagnóstico que se aplicó a tres grupos de bachillerato, elegidos aleatoriamente de la Ciudad de Nogales, Veracruz. La intención de este cuestionario fue identificar el nivel de conocimiento del lenguaje matemático como parte de una investigación más amplia sobre este tema. Algunas de las preguntas de este cuestionario fueron tomadas de Ortega y Ortega (2002) quienes analizan las deficiencias en el lenguaje matemático con la finalidad de elaborar propuestas a los docentes de matemáticas. El cuestionario tomado de la literatura se modificó para obtener tres versiones de acuerdo al nivel de estudios de cada uno de los grupos de primero, segundo y tercer año de bachillerato con algunas preguntas en común.

Introducción

La matemática descansa en un lenguaje que es "un lenguaje propio, generado y pulido a través de los siglos, las culturas y los progresos técnicos: el llamado lenguaje simbólico-matemático es un lenguaje vivo, que se está haciendo, prácticamente hoy universal, fuertemente estructurado, inequívoco y completo en sus propósitos", (Fernández del Campo, 2000, citado por Méndez, 2012). El uso de los símbolos en matemáticas es una de las

[15] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), México. Correo-e: Juana Onofre, 140787juana@gmail.com / Lidia Aurora Hernández, correo-e: lhernan@fcfm.buap.mx

características que ha permitido su desarrollo pero a su vez, es una barrera que deben superar los estudiantes en las matemáticas de todos los niveles, principalmente, en los básicos. Laborde (1982, citado por Gómez-Granell, 1989) reconoce que

> en un texto matemático escrito se utilizan dos códigos, la lengua natural y la escritura simbólica, es decir, una escritura formada por signos externos a la lengua natural tales como paréntesis, +, x, o letras y números. Estos signos pueden combinarse siguiendo reglas específicas para engendrar expresiones simbólicas.

La lengua matemática, es, según esta autora, el resultado del uso de esos dos códigos en interacción. La importancia del lenguaje matemático en el aprendizaje de las matemáticas y las relaciones entre lenguaje y matemáticas han sido estudiadas por varios investigadores como Pimm (1990); Laborde (1990); Duval (2006), D'Amore (2005) y otros.

Aunque con diferentes enfoques y matices, estos investigadores coinciden en recalcar la importancia de un manejo apropiado de los símbolos para la comprensión y la comunicación de lo matemático. Así, por ejemplo, afirman que la construcción de los objetos matemáticos no es posible sin un lenguaje. Godino (2000) también ha aportado en esta línea y como otros reconoce que los sistemas de símbolos matemáticos tienen una función comunicativa e instrumental. Explica que la matemática es un sistema conceptual lógicamente organizado, y que el lenguaje simbólico engloba los sistemas sintáctico y semántico, ambos interrelacionados.

Por todo lo anteriormente mencionado, en este trabajo consideramos de suma importancia el dominio del lenguaje matemático para el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos, y que este lenguaje comprende un conjunto de símbolos, significados, sonidos, expresiones, gráficos, esquemas, etcétera, y un conjunto de reglas, compartidos en una comunidad y relacionados con la actividad matemática.

Particularmente nos centraremos, y este es nuestro objetivo, en la detección de los símbolos, expresiones y gráficos que los estudiantes de bachillerato reconocen para más adelante hacer recomendaciones didácticas dirigidas a solventar las deficiencias que pudieran identificarse.

Partimos de la hipótesis, que otros investigadores han comprobado en diferentes poblaciones, de que existen serias deficiencias en el conocimiento y el manejo del lenguaje matemático. Pero, por ahora, atenderemos únicamente al conocimiento de aquellos símbolos y representaciones con los que los estudiantes de bachillerato han tenido contacto a lo largo de su vida escolar. Para la selección de dichos símbolos y representaciones nos hemos basado principalmente en un test elaborado por Ortega y Ortega (2002).

Metodología

Esta es una investigación de diagnóstico en la que los resultados se analizarán cuantitativamente, mediante gráficas y tablas de los datos, para obtener algunas conclusiones que fundamenten, en un trabajo futuro, recomendaciones didácticas.

La población fue de 123 estudiantes de bachillerato, estuvo conformada por un grupo de primero, otro de tercero y uno más de quinto semestre, cada uno con 41 estudiantes, de un bachillerato de la ciudad de Nogales, Veracruz. La prueba se aplicó a los estudiantes en el horario correspondiente a la clase de matemáticas y se les notificó que sus respuestas se utilizarían en una investigación de educación matemática sin presentar sus nombres. El tiempo del que dispusieron para responder el test fue de 30 minutos.

A cada grupo se le aplicó un test que contenía símbolos, expresiones y figuras matemáticas que se mostrarán más adelante junto con los resultados. A cada grupo se le aplicó un test de acuerdo al grado de estudios. Los grupos de primero, tercero y quinto semestre se llamarán grupo 1, 2 y 3 respectivamente y los test correspondientes también se llamarán test 1, 2 y 3. Los tres cuestionarios tenían algunas preguntas en común. Dichas preguntas en común y sus respuestas son las que se presentan en la siguiente sección.

Resultados

En esta sección se presentarán las preguntas del cuestionario que fueron comunes para los tres grupos, éstas son de la uno a la seis. Después se presenta la pregunta siete que se aplicó sólo a los grupos de tercer y quinto semestre. Enseguida de la pregunta o consigna se mostrarán gráficas o tablas mediante las cuales se podrá visualizar la cantidad de respuestas correctas y finalmente se agregan algunos comentarios. En algunos casos se incluyen ejemplos de las respuestas de los alumnos para profundizar en la forma como ellos respondieron.

Pregunta 1

Observa los símbolos <, >, +, -, *, /, %, π, ≥, ^, =, ≠, ≤, ÷, ±, ∞. Indica los que has visto utilizar y/o has utilizado.

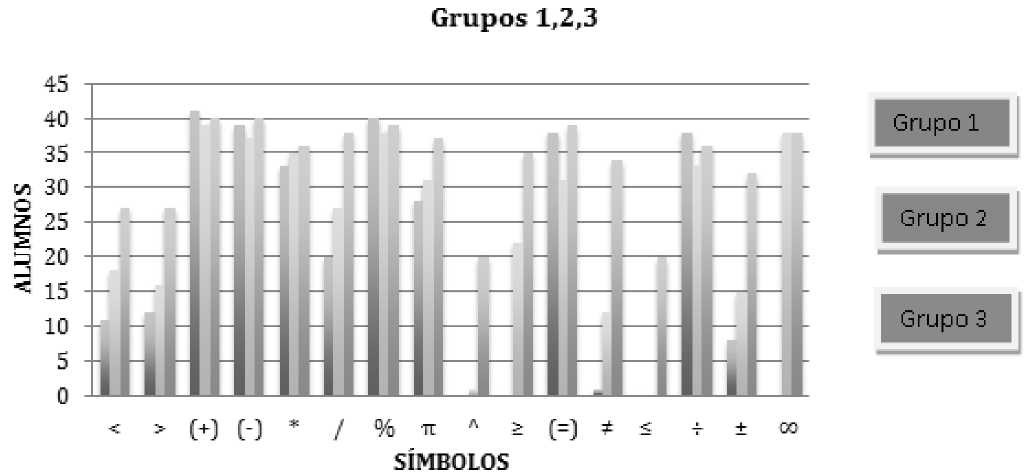


Figura 2. Cantidad de alumnos que dicen reconocer los símbolos de la pregunta 1

Como podemos observar, los símbolos más conocidos en los tres grupos son suma, resta, multiplicación y división, y los que no reconocieron los alumnos del grupo 1 son los símbolos ≥, ≤ y ≠. El segundo de estos símbolos tampoco fue reconocido por los alumnos del grupo 2 ni por un 50% de los del grupo 3. El símbolo "diferente a" también fue poco reconocido en el grupo 2, por apenas un 25% de esos alumnos. Los símbolos < y > también tuvieron un porcentaje bajo en los tres grupos. Finalmente, cabe mencionar que a los alumnos del grupo 1 no se les cuestionó acerca de los símbolos "∞" y "^".

Pregunta 2

¿Cómo se denotan los siguientes conjuntos numéricos?: Reales, racionales, enteros, naturales. Da algunos elementos que pertenezcan, y otros que no, a cada uno de los conjuntos anteriores.

Ningún estudiante proporcionó la letra o símbolo que denota a los conjuntos solicitados. Sin embargo, sí dieron ejemplos de alguno de sus elementos, aunque estos fueron escasos. En la tabla 1 se muestra la cantidad de alumnos que proporcionaron ejemplos correctos y el porcentaje de estos con respecto a la población total.

Tabla 1. Cantidad de alumnos que proporcionaron ejemplos de elementos de los conjuntos mencionados en la pregunta 2.

Conjuntos	Total	Porcentaje
Reales	11	9%
Racionales	10	8%
Enteros	25	20%
Naturales	19	15%

Como se puede observar, el porcentaje más alto se obtuvo con los números enteros, lo cual se esperaba, aunque no al nivel de 20%. El porcentaje más bajo fue para los números racionales, 8%, y los ejemplos de números naturales más comunes que dieron fueron los números {1, 2, 3, 4, 5, 6}, de reales repiten los números {1, 2, 3, etc.}, de los números enteros los alumnos escribieron solo números positivos, de números racionales {1/3, 11/7, 1/12, x/y}. Con estos resultados nos damos cuenta que la mayoría de los alumnos no reconocen los conjuntos mencionados y que quienes logran dar algunos ejemplos proporcionan de naturales y racionales, en sus ejemplos no aparecieron números negativos ni irracionales.

Tabla 2. Distribución de respuestas correctas de la pregunta 2 por grupo.

Conjuntos	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Reales	0	2	9
Racionales	1	4	5
Enteros	11	4	10
Naturales	13	1	5

En la tabla 2 observamos que los alumnos del grupo 3 son los que más ejemplos de números reales dieron, mientras que los del grupo 1 no proporcionaron ninguno. Los alumnos del grupo 1 se desempeñaron mejor con los ejemplos de enteros y naturales, curiosamente, fueron más los alumnos de este grupo que dieron ejemplos de naturales que los del grupo 2 y 3. Sin embargo, es importante notar que el conocimiento de los conjuntos de números solicitados es muy pobre y que su nomenclatura fue totalmente desconocida.

Pregunta 3

Expresa simbólicamente: "En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos."

Tabla 3. Cantidad de respuestas correctas para la pregunta 3.

Población	Correctos	Porcentaje
Grupo 1	12	29%
Grupo 2	13	32%
Grupo 3	20	49%
Total	45	37%

De la población total de 123 alumnos solo el 37% pudo expresar simbólicamente este teorema, el cual se estudia desde la secundaria y se utiliza bastante en trigonometría. Algunos alumnos dieron la expresión simbólica equivalente $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, la cual no se tomó como correcta. En el grupo uno no se dieron respuestas equivalentes, en el grupo dos solo una respuesta equivalente y en el grupo tres solo cinco alumnos dieron la expresión equivalente. Aunque en todos los grupos se obtuvo un porcentaje menor a 50% de respuestas correctas, es importante señalar que los alumnos del grupo tres son los que acertaron más, de las respuestas incorrectas que se dieron tenemos del grupo uno que nueve estudiantes no contestaron nada, dos alumnos escribieron lo siguiente $c^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, dibujando bien el triángulo rectángulo, del grupo dos, 24 alumnos no escribieron nada, del grupo tres, solo tres alumnos no contestaron nada.

Ejemplos de respuestas incorrectas más comunes, de los tres grupos:

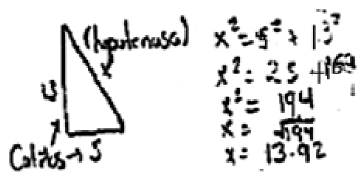


Figura 3. Respuesta del alumno 14, grupo 1 a la pregunta tres.

Figura 4. Respuesta del alumno 19, grupo 3, a la pregunta tres.

Figura 5. Respuesta del alumno 30, grupo 2, a la pregunta tres.

Figura 6. Respuesta del alumno 26, grupo 2, a la pregunta tres.

Pregunta 4

Relaciona con su nombre:

$(x-2)^2$	a) trinomio cuadrado perfecto
$(x-2)(x+2)$	b) binomio al cuadrado
x^2+2x+1	c) diferencia de fracciones
$\frac{1}{2}-\frac{3}{3}$	d) producto de binomios

Tabla 4. Cantidad de estudiantes que relacionaron correctamente las expresione algebraicas con su nombre, por grupo y porcentajes.

Expresión algebraica	Grupo 3	Grupo 2	Grupo 1	Total	Porcentaje
$(x-2)^2$	35	29	37	101	82%
$(x-2)(x+2)$	32	11	31	74	60%
x^2+2x+1	29	21	33	83	67%
$\frac{1}{2}-\frac{3}{3}$	38	36	38	112	91%

Las expresiones algebraicas de la tabla 4 fueron las comunes a los tres grupos. En esta tabla notamos que ninguna expresión tuvo un porcentaje menor a 50%. Sin embargo, en el grupo 2 sí hubo porcentajes menores a 50% de aciertos.

Pregunta 5

Explica el significado de las siguientes afirmaciones y di si son ciertas o no:

$7 > 10$

$2+2 = 4$

$\frac{3+1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$

$-10 < -1$

$\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

La veracidad o falsedad de las expresiones pudo ser determinada correctamente por la mayoría de los estudiantes, en ninguna de las afirmaciones se obtuvo un porcentaje menor de 50% de aciertos. Sin embargo, aunque los alumnos supieron si las afirmaciones eran ciertas o falsas, pocos explicaron su significado, como se muestra en la tabla 5.

Tabla 5. Alumnos que explicaron las afirmaciones

Afirmación	Grupo 1 (11 alumnos)	Grupo 2 (4 alumnos)	Grupo 3 (16 alumnos)	Total	Porcentaje
1) 7>10	9	4	13	26	21.14%
2) 2+2=4	9	2	10	21	17.07%
3) ((3+1)/3)= 1+(1/3)	1	1	4	6	4.88%
4) -10<-1	8	0	9	17	13.82%
5) (12/24)=(1/2)	7	1	6	14	11.38%

Como podemos ver en la tabla 5, ninguno de los tres grupos tiene un porcentaje mayor a 22%, lo cual nos lleva a pensar dos posibilidades, una que a los alumnos olvidaron la petición de explicar el significado o que los alumnos no fueron capaces de explicarlas, aunque supieran que era falsa o verdadera. Del total de la población fueron 31 alumnos los que dieron el significado aunque no de todas las afirmaciones.

Ejemplos de cómo contestaron los alumnos a esta consigna:

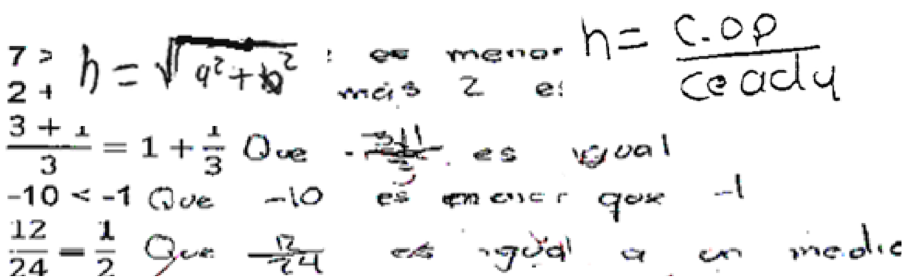


Figura 7. Ejemplo del alumno 15 grupo 3, a la pregunta cinco

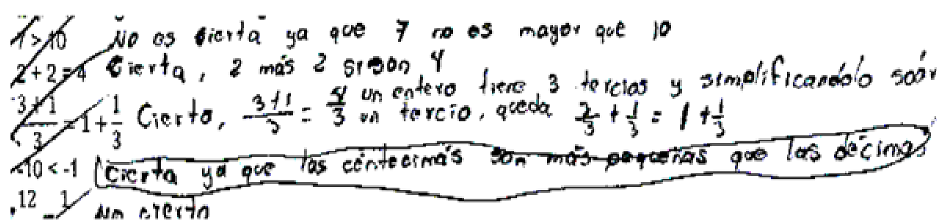


Figura 8. Ejemplo erróneo del alumno 36 del grupo 1, a la pregunta cinco

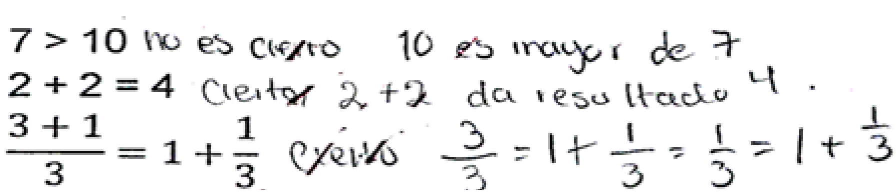


Figura 9. Ejemplo erróneo del alumno 27 del grupo 2, a la pregunta cinco

PREGUNTA 6

Escribe el nombre de las siguientes figuras:

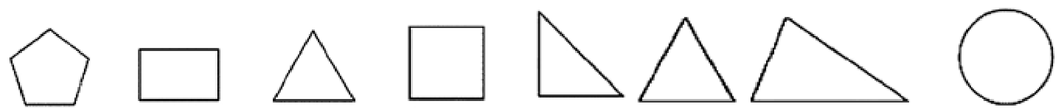


Tabla 6. Resultados por grupo y el porcentaje de respuestas correctas a la pregunta 6

Figura	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Total	Porcentaje
1. Pentágono	39	35	40	114	93%
2. Rectángulo	41	40	41	122	99%
3. Equilátero	5	16	37	58	47%
4. Cuadrado	41	41	41	123	100%
5. T. Rectángulo	11	18	31	60	49%
6.-Isósceles	26	23	25	74	60%
7.-Escaleno	24	15	18	57	46%
8.-Círculo	41	41	41	123	100%

En la tabla 6 vemos que los triángulos equilátero, rectángulo y escaleno son los que la población contestó correctamente con un porcentaje menor a 50% del total de la muestra; el pentágono y el rectángulo fueron reconocidos casi por la totalidad de la muestra, pero solo el cuadrado y el círculo fueron contestados correctamente a 100%. Estas figuras geométricas son básicas y se esperaba que fueran reconocidas todas a 100% ya que se enseñan desde la primaria. Notemos que tuvieron mejores resultados los alumnos del grupo 3, excepto en las figuras 6 y 7.

Ejemplos de los errores más comunes en los tres grupos:

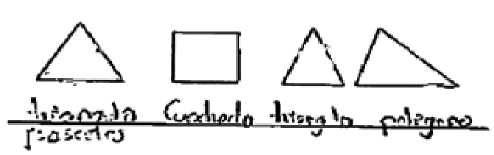


Figura 10. Respuesta del alumno 18, grupo 2, a la pregunta seis.

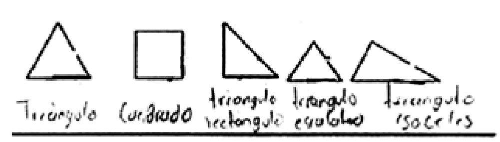


Figura 11. Respuesta del alumno 12, grupo 3, a la pregunta seis.

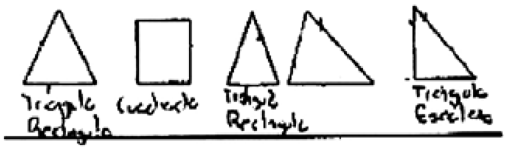


Figura 12. Respuesta del alumno 39, grupo 1, a la pregunta seis.

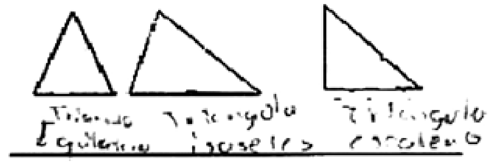


Figura 13. Respuesta del alumno 34, grupo 3, a la pregunta seis.

Se encontró deficiencia en el reconocimiento de los tipos de triángulos, a pesar de que se les especificó que escribieran el nombre de los diferentes tipos de triángulos ellos intercambiaron los nombres, ver figuras 12 y 13, o escribieron “triángulo” a alguno de ellos, como en las figuras 10 y 11.

PREGUNTA 7

Esta actividad se aplicó solo a los alumnos de tercer y quinto semestre.

7.- Escribe el nombre de los siguientes ángulos:

Tabla 7. Porcentaje de respuestas correctas a la pregunta 7

Ángulo	Grupo 2	Grupo 3	Total	Porcentaje
Agudo	30	27	57	69.51%
Obtuso	29	30	59	71.95%
Recto	32	32	64	78.05%

Del total de la población 60% identificó correctamente todos los ángulos, 13 % no identificó ninguno, 17% obtuvo dos respuestas correctas y 10% obtuvo una sola respuesta correcta. De acuerdo a los porcentajes podemos decir que se obtuvo un desempeño regular en el reconocimiento de los ángulos.

Conclusiones

Con base a los test realizados se concluye que los estudiantes encuestados tienen deficiencias en el reconocimiento del lenguaje matemático básico. Al hacer la comparación de los tres grupos vemos que los alumnos del grupo 3 se desempeñaron mejor y que los del grupo 2 tuvieron el desempeño más bajo. Fue curioso notar que los símbolos $\geq$, ^, $\neq$, $\leq$, y $\pm$ tuvieron porcentajes bajos en todos los grupos, lo cual muestra que la enseñanza de la matemática es limitada, por ejemplo, se enseña el símbolo "=" pero no el símbolo "$\neq$". Lo anterior se demuestra también con el resultado de la pregunta 2, acerca de los símbolos de los conjuntos de números y sus ejemplos donde ocurrió que ningún estudiante pudo proporcionar el símbolo de ningún conjunto de números. Considerando que la muestra es de estudiantes de bachillerato debemos reflexionar qué tan profundo es su conocimiento de los números. Del total de 123 alumnos, solo 25 se animaron a proporcionar algunos ejemplos de los conjuntos requeridos, aunque por cierto, solo aparecieron enteros positivos y fracciones.

Es sabido que es difícil para los estudiantes la traducción del lenguaje natural al algebraico y esto se pudo constatar en la solicitud de expresar simbólicamente el Teorema de Pitágoras. Un 64% de éxito en estudiantes de bachillerato es bajo, dada la importancia y el uso de este teorema. Aquellos que ofrecieron una expresión equivalente muestran que reconocieron el teorema pero que no tradujeron fielmente el enunciado sino que recurrieron a una expresión memorizada.

El ejercicio donde se les pidió explicar cierta expresión matemática era muy interesante, pero, desafortunadamente, ellos se enfocaron en contestar si eran ciertas o no y quizá olvidaron la petición.

Al recabar toda la información observamos la deficiencia que tienen los alumnos de bachillerato para reconocer símbolos, expresiones algebraicas y figuras geométricas que se estudian en secundaria. Por lo tanto, concluimos que diseñar estrategias didácticas que promuevan el buen uso de los símbolos y su significado es un problema vigente.

Agradecimientos. A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP por el apoyo económico recibido a través de una beca de investigación en el marco del proyecto VIEP 2015 titulado "Dificultades en el aprendizaje de temas selectos de matemáticas y propuestas didácticas".

Referencias

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*, México: Editorial Reverté.

Méndez, R. (2012). Adquisición del lenguaje matemático. Diplomado: Construcción de Unidades de Aprendizaje para el Desarrollo de Competencias. Guía de unidad de aprendizaje disciplinar 4. Guanajuato, México. Recuperado de: http://qacontent.edomex.gob.mx/idc/groups/public/documents/edomex_archivo/dregional_neza_pdf_lenmat.pdf

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos, *Uno* Revista de didáctica de las matemáticas, *7*(25), 77-87.

Gómez-Granell, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, *1*(3-4), 5-16.

Laborde, C. (1990). Language and Mathematics, en P. Nesher y J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics and Cognition*, 53- 69. Cambridge University Press.

Ortega, J. F., y Ortega, J. A. (2002). Experiencia sobre el conocimiento del lenguaje matemático. Acta de las X Jornadas de Asepuma.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically*. New York Routledge y Kegan Paul. Traducción cast. (1990) *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencias Ediciones Morata.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula, 15*. Ediciones Morata.

Wagner, S. y Kieran, C., (eds.) (1989). Research Issues in the race of the Psychology of Mathematics Education, (Learning and Teaching of Algebra), Lawrence Erlbaum.

Tendencias
en la educación matemática
basada en la investigación

Volumen 1

Se terminó de imprimir en diciembre de 2015
en los talleres de El Errante editor, S.A. de C.V.
ubicado en Privada Emiliano Zapata 5947,
col. San Baltazar, Puebla, Pue.

El tiraje consta de 400 ejemplares.